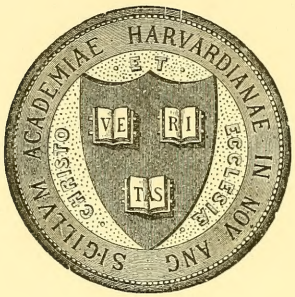
SOC
7130

SoC
7130

HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange.

October 9, 1908.

OCT 5 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I.

A LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre,
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*

1866.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I.

LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre,
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*

1866.

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ

AU 1 JANVIER 1867.

—

Nota. Les noms des membres fondateurs sont précédés d'un astérisque.

—

Bureau.

Président,	MM.	Catalan.
Vice Président,		Laguesse.
Secrétaire général,		Lacordaire.
Secrétaire adjoint,		Candèze.
Trésorier,		Spring.
Bibliothécaire,		De Koninck.

Membres effectifs.

1835	*Brasseur,	Professeur à	l'Université de Liége
	*Gloesener,	id.	id.
1842	Lacordaire,	id.	id.
	Noel,	id.	id.
	Spring,	id.	id.
	de Koninck,	id.	id.
	Chandelon,	id.	id.

Selys Longchamps (Baron de) Sénateur, etc.
Neuens, Lieutenant Colonel d'artillerie à Liége.
Trasenster, Professeur à l'Université de Liége.
Laguesse, Ingénieur des Mines à Liége.

1844 Schmit, Répétiteur à l'Université de Liége.
Kupferschlaeger, J. Professeur id.
1845 Delvaux, Ad., Ingénieur honoraire.
1847 De Cuyper, Professeur à l'Université de Liége.
Schwann, id.
1853 Bède, ancien id. id.
Candèze, Docteur en Médecine à Liége.
Chapuis, F. id. à Verviers.
Paque, ancien Professeur de Mathématiques à l'Athénée
1855 Dewalque, G. Professeur à l'Université de Liége.
Bourdon, Jules, Docteur en Sciences, à Liége.
1856 Catalan, Professeur à l'Université de Liége.
1857 Houtain, Directeur de l'école industrielle à Liége.
1860 Gillon, Professeur à l'Université de Liége.
Terssen, Major d'artillerie à Liége.
1861 Perard, Professeur à l'Université de Liége.
Morren, Ed. id. id.
1865 De Borre, Alfred, à Jemeppe.
Folie, Répétiteur à l'école des mines à Liége.
Charlier, E. Docteur en Médecine à Liége.

—

Membres correspondants.

1835 D'Omalius d'Halloy, Sénateur, à Halloy.
Dumortier, B., Membre de la Chambre des Représentants, à Tournay.
Quetelet, Directeur de l'Observatoire à Bruxelles.
Teichman, Gouverneur de la province d'Anvers.
1842 Van Beneden, Professeur à l'Université de Louvain.
1845 Decaisne, J. Professeur au Museum d'Histoire Naturelle à Paris.
De Liebig, (Baron J.) Professeur de chimie à l'Université de Munich.
Graham, Directeur de la monnaie à Londres.
Pelouze, Membre de l'Institut à Paris.
Stas, Professeur à l'École militaire à Bruxelles.

Nyst, H. Professeur à l'École militaire à Bruxelles.
De Verneuil, Ed. Membre de l'Institut à Paris.
Kaiserling (Comte de) Membre de l'Académie de St. Petersbourg.
Martius (Chevalier de) Secrétaire de l'Académie des Sciences à Munich.
Gervais, Professeur à la faculté des Sciences à Paris.
Sundevall, id. à Stockholm.
Putzeys, Secrétaire général au ministère de la Justice à Bruxelles.
Reichart, Professeur à l'Université de Berlin.
Valentin, id. de Berne.
Longet, id. à la Faculté de Médecine de Paris.
Steichen, id. à l'École militaire à Bruxelles.
Lamarle, id. à l'Université de Gand.
Breguet, mécanicien à Paris.
Simonoff, Directeur de l'Observatoire de Casan.
Tcheffkine, Général, Aide de camp de l'Empereur de Russie à St Petersbourg.
Combes, Inspecteur général des Mines à Paris.
Seyler, Docteur en Médecine à Wiltz.
1844 Lecointe, Professeur de Mathématiques supérieurs à Anvers.
Malherbe, Juge au tribunal de Metz.
Carez, Ingénieur des Ponts et Chaussées à Bruxelles.
1845 Van Rees, Professeur à l'Université d'Utrecht.
Maus, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées à Mons.
Navez, Major d'artillerie à Bruxelles.
Coquilhat, Colonel d'artillerie à Anvers.
Du Bus, B., (Vicomte) Directeur du Musée d'Histoire Naturelle de Bruxelles.
Hagen. Docteur en Médecine à Kœnigsberg.
Chasles, Membre de l'Institut à Paris.
Perdonnet, Directeur de l'École centrale à Paris.
1847 Bosquet, Pharmacien à Maestricht.
1848 Klipstein, (von) Professeur à l'Université de Giessen.
1849 Michaelis, Professeur à l'Athénée de Luxembourg.
1850 Schroeter, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences à Vienne.
Jacobi, Membre de l'Académie de St Petersbourg.

Ansted, Professeur de Géologie à Londres.
Schlegel, Conservateur du Museum d'Histoire Naturelle à Leyde.
1852 Le Conte, J. L. Docteur en Médecine à Philadelphie.
Poncelet, Membre de l'Institut à Paris.
Lyell, Membre de la Société Royale de Londres.
Davidson, Ph., id.
Steinheil, Professeur à l'Université de Munich.
Ettingshausen, (von) Professeur de Physique à l'Université de Vienne.
Lamont, Directeur de l'Observatoire à Munich.
Dana, Professeur à Philadelphie.
Ettingshausen, (Constantin von) à Vienne.
Pohl, Répetiteur de Chimie à Vienne.
853 Westwood, Professeur de Zoologie à l'Université d'Oxford.
Parry, à Londres.
Waterhouse, Conservateur au Musée Britannique à Londres.
Perris, Conseiller de Préfecture à Mont-de-Marsan.
Petrina, Professeur de Physique à Prague.
1854 Koelliker, id. à l'Université de Würzbourg.
Dutreux, Receveur Général à Luxembourg.
Drouet, H., Naturaliste à Charleville.
Weber, Professeur de Physique à l'Université de Göttingen.
Schaar, Professeur à l'Université de Gand.
Stammer, Docteur à Dusseldorf.
Erlenmeyer, id. à Neuwied.
Lucas, H., Aide Naturaliste au Museum d'Histoire Naturelle à Paris.
Blanchard. Emile, Membre de l'Institut à Paris.
1855 Plucker, Professeur à l'Université de Bonn.
Hauer, (Fr. von) Membre de l'Académie des Sciences à Vienne.
1856 Geinitz, B. B. Professeur à l'École Polytechnique à Dresde.
Foucault, L. Membre de l'Institut à Paris.
Becquerelle, id. id.
Despretz, id. id.
Babinet, id. id
Liais, Astronome à Paris.
Dumoncel, Physicien à Paris.

MICHOT, (Abbé), botaniste à Mons.

1857 JAMIN, Professeur de Physique à l'École Polytechnique à Paris.

SEDGWICK, Membre de la Societé Géologique de Londres.

FITTON, Docteur à Londres.

RAY, J., Trésorier de la Société d'Agriculture de Troies.

WRIGHT, Dr Th., Membre de la Société Royale d'Edimbourg à Cheltentam.

1858 SCHMIT, Professeur à l'Université de Bruxelles.

BINCKHORST (van), Propriétaire à Maestricht.

CALIGNY (Marquis de) à Versailles.

WOOD, EDW. à Richmond, Jorkshire.

1859 MARSEUL, (Abbé de), à Paris.

BEYRICH, Professeur à l'Université de Berlin.

MARCOU, J., Professeur de Géologie.

1860 DUBOIS-RAIMOND, Professeur à l'Université de Berlin.

BRÜCKE, Professeur à l'Université de Vienne.

MULLER, J. A., Professeur de Gymnase à Aix-la-Chapelle.

MURRAY, A. Membre de la Société Royale d'Horticulture à Londres.

1861 BOUCHER DE CREVECOEUR DE PERTHES, Président de la Société Impériale d'Emulation à Abbeville.

COLNET d'HUART, Professeur à l'Athénée de Luxembourg.

ZEYS, Conservateur au Museum Royal d'Histoire Naturelle à Dresde.

MAGNUS, Professeur de Physique à l'Université de Berlin.

MILNE EDWARDS, Membre de l'Institut à Paris,

FAVRE, Professeur de Géologie à l'Université de Genève.

STUDER, id. id. à Berne.

CHEVROLAT, Membre de la Société Entomologique de France à Paris.

1862 CASPARY, Professeur de Botanique à l'Université de Kœnigsberg.

WARTMAN, Professeur de Physique à Genève.

LAMÉ, Membre de l'Institut à Paris.

1863 BAILLY, Professeur à l'Université de Dublin.

GOSSAGE, Membre de la Société Étrangère à Londres.

GUBLER, Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.

DELESSE, Professeur de Géologie à l'Ecole Normale à Paris.

1864 Thomson, James, Membre de la Société Entomologique de France, à Paris.

Brunner de Wattenville, Directeur Général des Télégraphes, à Vienne.

1865 Gherardi, (Commandeur) Professeur à l'Université de Bologne.

Filipi (de), Directeur du Museum d'Histoire Naturelle à Turin.

Durieu de Maisonneuve, Directeur du Jardin Botanique à Bordeaux.

Desmoulin, Président de la Société Linnéenne à Bordeaux.

Cialdi, Directeur des Travaux Maritimes des États-Pontificaux, à Rome.

Bernard, Claude, Professeur au Collége de France.

Fée, id., à la Faculté de Médecine de Strasbourg.

Hugueny, Professeur au Lycée Impérial de Strasbourg.

Dausse, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées à Paris.

Lejoly, Président de la Société des Sciences de Cherbourg.

Varley Cromwell, Ingénieur en Chef de la Compagnie des Télégraphes Électriques à Londres.

Godwin, Austen, Membre de la Société Géologique de Londres.

Hamilton, Président de la Société Géologique de Londres.

1866 Fournet, Professeur de Géologie à la Faculté des Sciences de Lyon.

Rodriguez, Directeur de la partie Zoologique du Museum d'Histoire naturelle de Guatemala.

Ledent, Professeur de Mathématique au Collège communal de Malines.

I. — *Expériences sur la détermination pratique des moments d'inertie des Canons en bronze, longs et courts de* 6 *et de* 12,

PAR

COQUILHAT,

LIEUTENANT COLONEL D'ARTILLERIE,
COMMANDANT DU MATÉRIEL DE LA PLACE D'ANVERS, OFFICIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD.
DÉCORÉ DE LA CROIX COMMÉMORATIVE DE BELGIQUE,
ET DE PLUSIEURS ORDRES MILITAIRES ET ÉTRANGERS.

§ 1. Moyens de déterminer pratiquement les moments d'inertie des bouches a feu : utilité du pendule.

Les canons sont généralement composés de solides de révolution, dont les courbes génératrices ont des expressions analytiques connues : ils ont en outre quelques parties irrégulières, telles que les anses, les visières, les crocs de brague etc., dont les masses sont peu considérables relativement au reste de la bouche à feu.

Il est donc possible de déterminer par des intégrales les moments d'inertie de ces solides de révolution, et de calculer soit rigoureusement, soit avec une approximation suffisante, les moments d'inertie des autres parties ; on peut en déduire ensuite le moment d'inertie total de la pièce.

Mais ces intégrations supposent une densité du métal uniforme. Loin qu'il en soit ainsi, cette densité varie dans les diverses

sections droites de la pièce, et dans une même section, suivant la distance à l'axe de l'âme. La loi générale de la variation de cette densité est connue, mais l'expression analytique de cette variation est encore à trouver.

En présence de ces difficultés, nous avons pensé qu'il y aurait quelque utilité à déterminer pratiquement les moments d'inertie des bouches à feu.

Les expériences que nous avons faites se rapportent aux canons en bronze longs et courts de 6 et de 12, modèle belge.

Nous avons décrit dans une note de la 3e partie de notre ouvrage sur la fabrication des canons, le moyen pratique de trouver les moments d'inertie des projectiles et des corps solides en général, par l'emploi du pendule à axe de rotation horizontal.

Il est assez curieux qu'un balancier permette de trouver pratiquement les moments d'inertie des corps, moments qui, au premier abord et par leurs définitions, semblent être du domaine des mathématiques pures.

Le poids et la position du centre de gravité d'un pendule étant connus, on peut déduire son moment d'inertie du nombre des oscillations qu'il fait dans un temps donné. Sans rien changer à ce pendule, si on ajoute à sa masse un corps, dont le poids et la position du centre de gravité sont donnés, il en résulte un nouveau pendule, dont le poids et la position du centre de gravité seront connus, et dont les oscillations serviront également à trouver son moment d'inertie relativement à l'axe de suspension.

Retranchant le premier moment du second, on obtient pour différence le moment d'inertie du corps ajouté, relativement à l'axe de rotation. Il est facile après de calculer ce moment relativement au centre de gravité du corps : de là un moyen simple d'évaluer pratiquement les moments d'inertie des canons, des affûts, etc., et de tout autre corps dont on aurait intérêt à connaître cette propriété géométrique.

Les oscillations du pendule chargé et non chargé du canon, nous permettent d'évaluer les moments d'inertie de cet appareil dans ces deux circonstances, et la différence entre ces moments, nous donnera celui de la bouche à feu relativement à l'axe de suspension.

Le pendule balistique est une machine bien utile dans une

artillerie établie sur des bases rationnelles. On peut à la rigueur s'en passer pour la détermination des vitesses initiales des projectiles, en employant l'appareil électro balistique ; mais il faut reconnaître que le canon pendule est nécessaire pour étudier les réactions de la charge sur la bouche à feu et de celle-ci sur l'affût ; car les vitesses initiales des projectiles ne peuvent servir qu'à évaluer grossièrement la quantité de mouvement de recul transmise à la pièce, et elles sont insuffisantes pour différencier les effets des diverses espèces de poudre, parce que les résultats de la cible pendule ne concordent pas avec ceux de l'arme pendule.

Il ne suffit pas de connaître les moments d'inertie pour pouvoir apprécier les effets des bouches à feu sur leurs affûts, mais il faut encore avoir des données sur le mode d'action de la poudre dans l'âme de la pièce et sur la quantité de mouvement communiquée à celle-ci.

Nous avons donc fait précéder le récit de nos expériences de quelques considérations et calculs concernant ces sujets, et nous sommes entré dans les développements théoriques relatifs à l'emploi du pendule pour la détermination des moments d'inertie des canons : l'exposé de ces expériences a pu se faire ensuite d'une manière succincte et non interrompue.

---

§ 2. CONSIDÉRATIONS SUR LE MODE D'ACTION DE LA POUDRE CONTRE LA BOUCHE A FEU.

La force expansive du gaz que produit la déflagration de la charge de poudre, imprime à la bouche à feu une quantité finie de mouvement, que nous représentons par μ. Cette quantité de mouvement est obtenue par une série d'actions successives, suivant une loi de continuité qui dépend du développement graduel des gaz. Au moment où ceux-ci se forment, ils se répandent du lieu qu'ils occupaient à l'état solide dans les espaces environnants : cette expansion a nécessairement lieu par

le mouvement des gaz qui réagissent contre la paroi de l'âme et contre la partie postérieure du projectile.

Les gaz arrivent avec une certaine vitesse contre les parois du lieu qui les renferme et il en résulte un choc, qui est fonction de cette vitesse et de la masse des gaz.

Les interstices qui existent entre les grains de poudre, et le vide plus ou moins grand qu'il y a entre la charge et la surface de l'âme, en arrière du projectile, présentent, au développement des gaz, un espace assez grand pour que leur densité devienne très-inférieure à celle de la galette de poudre dont ils proviennent.

Sans cet espace, la densité des gaz étant celle des grains de poudre, il en résulterait une tension tellement considérable qu'aucune bouche à feu ne pourrait résister au tir, en supposant toutefois, ce qui n'est pas, que la poudre en roche brulât aussi vite que la poudre en grains.

La durée des actions successives des gaz est la même que celle du trajet de l'âme par le projectile : à la rigueur elle est un peu plus longue, parce que les gaz agissent encore sur la bouche à feu après le départ du boulet : toutefois cette durée est si courte que l'on peut supposer, que la quantité de mouvement μ a été communiquée instantanément à la bouche à feu, et est le résultat d'un choc. Ce qui rend cette supposition plus vraisemblable, c'est qu'effectivement les gaz viennent heurter contre les parois de l'âme avec une violence, qui est fonction de leur vitesse et de leur masse.

Nous ne nous occuperons pas de toutes les causes qui influent sur le développement plus ou moins rapide des gaz et sur leur tension : causes parmi lesquelles on compte la chaleur produite, les qualités physiques et chimiques des matières qui composent la poudre, etc., mais nous ne pouvons passer sous silence une considération exposée pour la première fois par M[r] Melsens, dans une note remarquable présentée à l'académie des sciences de Bruxelles. Ce savant professeur, qui s'est beaucoup occupé de cette question, fait voir l'influence d'une haute température sur la composition des gaz : sous cette influence, les gaz se décomposent dans leurs éléments plus simples ou moins compliqués, d'où résulte un accroissement subit de leur tension ; deux volumes de vapeur d'eau peuvent devenir tout-à-coup trois

volumes d'un mélange d'hydrogène et d'oxigène ; deux volumes d'acide carbonique deviendraient trois volumes d'un mélange d'oxide de carbone et d'oxigène, etc., etc.

Quoique les actions des gaz contre la bouche à feu soient successives, la quantité de mouvement μ, est la même que si elles avaient lieu simultanément ; car après chaque choc, le mouvement est le même, que s'il avait lieu à l'instant où se produit le choc suivant : on a donc le même résultat pour deux chocs successifs que s'ils avaient lieu ensemble, et n'en formaient qu'un seul égal à leur somme : en étendant ce raisonnement, on voit que la quantité de mouvement produite par une série de percussions est la même que si toutes ces percussions réunies agissaient au même instant.

§ 3. CONSIDÉRATIONS SUR LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT IMPRIMÉE A LA BOUCHE A FEU LORS DU TIR.

L'action de la poudre détermine la projection du boulet en avant et imprime à la bouche à feu un mouvement rétrograde, qui se communique à l'affût et produit le recul du système.

Si l'on suppose le vent anéanti, et si l'on fait abstraction de la masse de la poudre, et de son enveloppe, ainsi que du mode de chargement, la quantité de mouvement du boulet au sortir de l'âme est équivalente à celle transmise à la bouche à feu.

Soient donc :

b la masse du boulet.

v la vitesse initiale du boulet,

c la masse du canon.

V la vitesse de recul du canon pendule ; autrement dit, la vitesse que l'action de la poudre imprimerait au canon, si, n'étant pas lié à l'affût, il pouvait céder librement à cette action.

μ la quantité de mouvement imprimée à la bouche à feu.

On a les relations :

$$\mu = c\,V = b\,v \quad (1)$$

Il y a plusieurs moyens de déterminer la vitesse initiale du boulet; par la portée, par le choc contre une cible pendule, autrement dit pendule balistique, par l'appareil électro-balistique et par d'autres mécanismes. C'est cette facilité, de trouver la vitesse initiale du boulet, qui a engagé à s'en servir pour déterminer la quantité de mouvement de la bouche à feu. Mais la formule (1) exige des corrections; les hypothèses sur lesquelles elle est fondée sont inadmissibles, et elle ne donne que des valeurs plus ou moins approchées.

La charge de poudre a une masse comparable à celle du boulet, et l'on ne peut en faire abstraction. La réaction contre le fond de l'âme ne peut donc égaler l'action contre le boulet, qu'en tenant compte de la quantité de mouvement imprimée aux gaz, dont une partie accompagne le boulet et l'autre le canon.

La poudre, renfermée entre le fond de l'âme et le boulet, agit comme une force centrale qui ne peut déplacer le centre de gravité du système soumis à ses efforts. En supposant donc la charge convertie en gaz par une combustion uniforme, on peut admettre par analogie, qu'une moitié de la masse des gaz est animée d'une vitesse moyenne égale à celle du boulet et l'accompagne dans le trajet de l'âme, tandis, que l'autre moitié plus condensée, suit le fond de l'âme avec la vitesse de recul du canon.

Soient :

v la vitesse initiale du boulet, qui sera aussi celle d'une moitié de la charge de poudre convertie en gaz et accompagnant le projectile.

b la masse du boulet.

c la masse du canon.

p la masse de la charge de poudre.

V la vitesse de recul du canon qui sera aussi celle de l'autre moitié de la charge de poudre convertie en gaz et accompagnant le fond de l'âme dans son mouvement rétrograde.

Les masses mises en mouvement sont exprimées par :

$b + \frac{1}{2} p$ masses animées de la vitesse initiale v du boulet.

$c + \frac{1}{2} p$ masses animées de la vitesse de recul V.

Le centre de gravité du système devant rester immobile, il

faut qu'il y ait égalité entre les quantités opposées de mouvement, ou entre ces masses multipliées par leurs vitesses respectives. On a donc :

$$(b + \tfrac{1}{2}p)\,v = (c + \tfrac{1}{2}p)\,V) \qquad (2)$$

On en déduit :

$$\mu = cV = bv + \tfrac{1}{2}p(v - V) \qquad (3)$$

La vitesse v du boulet étant plus considérable que celle V de recul, il s'ensuit que le terme $\frac{1}{2}p(v - V)$ est positif et que $cV > bv$.

Ainsi la quantité de mouvement du canon est plus grande que celle du boulet.

Dans ces formules, nous avons fait abstraction du vent, et nous avons admis que la surface d'action des gaz contre le projectile, était la même que contre le fond de l'âme. Mais en supposant l'action des gaz uniforme sur toutes les sections droites de l'âme, la quantité de mouvement transmise à la pièce sera à celle communiquée au projectile, comme le cercle de l'âme est au cercle du mobile, ou comme $R^2 : r^2$,

R étant le rayon de l'âme et

r le rayon du projectile.

Cette correction faite à notre première hypothèse exprimée par l'équation (1) donne,

$$\mu = cV = \frac{bv\,R^2}{r^2}. \qquad (4)$$

En l'appliquant à l'équation (2) on obtient :

$$(c + \tfrac{1}{2}p)\,V = (b + \tfrac{1}{2}p)\,\frac{v\,R^2}{r^2}.$$

On en déduit :

$$V = \frac{(b + \frac{1}{2}p)\,v\,R^2}{(c + \frac{1}{2}p)\,r^2}, \qquad (5)$$

et en multipliant les deux membres par c on a :

$$\mu = Vc = \frac{(b + \frac{1}{2}p)}{c + \frac{1}{2}p)} \cdot \frac{c\,v\,R^2}{r^2}. \qquad (6)$$

Telle est l'expression de la valeur de μ, en tenant compte

de la quantité de mouvement imprimée à la charge de poudre, et de la différence entre le calibre de la pièce et celui du projectile.

Les canons de siège pèsent environ 250 boulets et ceux de campagne 150 boulets, et le poids de la charge ordinaire de poudre est le $\frac{1}{3}$ de celui du projectile. Il en résulte que la quantité représentée par c est toujours très-grande relativement à $\frac{1}{2}p = \frac{1}{6}b$, et que l'on peut sans erreur sensible négliger $\frac{1}{2}p$ dans le facteur $c + \frac{1}{2}p$, formule (6)

Cette formule devient donc pour la charge au tiers :

$$\mu = \mathrm{V}c = \frac{7\ b\ v\ \mathrm{R}^2}{6\quad r^2} \qquad (7)$$

En faisant abstraction de la correction relative au vent, le coëfficient $\frac{7}{6}$ de la formule précédente, montre qu'avec la charge au tiers la quantité de mouvement de la pièce l'emporte de $\frac{1}{6}$ sur celle du boulet. Le facteur $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$ est sensiblement égal à $\frac{21}{20}$, dans la supposition assez généralement vraie que le vent est le $\frac{1}{40}$ du calibre ; il en résulte que la formule (7) appliquée aux canons, donne pour la valeur de μ,

$$\mu = \mathrm{VC} = \tfrac{7}{6} \times (\tfrac{41}{40})^2\ b\ v\ , \qquad \text{ou}$$
$$\mu = 1{,}225\ b\ v. \qquad (8)$$

La pratique ne confirme pas entièrement les résultats des formules (6) et (8), basés sur des hypothèses plus ou moins plausibles, mais qui ne tiennent pas compte de toutes les circonstances du tir.

Des formules plus compliquées, et déduites d'une haute analyse par plusieurs géomètres et artilleurs illustres, n'ont pas réussi davantage à établir la relation entre la quantité de mouvement de la pièce et celle du projectile, et il a bien fallu chercher une solution dans des formules empiriques. Voici celle de Mr Roche :

$$\mu = b\ v\left(1 + \sqrt{\frac{p}{b}}\right) \qquad (9)$$

dans laquelle les notations sont les mêmes que précédemment.

Cette expression a été accueillie avec faveur, à cause de son utilité pour certaines catégories de charges, et pour quelques calibres, mais elle n'est pas d'une approximation suffisante dans beaucoup de cas.

Mr le général Piobert, reprenant la formule (6), fait remarquer avec raison que le système formé de la pièce et de l'affût a un poids incomparablement supérieur à celui du boulet, et aura une vitesse de recul toujours très-petite, et qu'une très-faible partie des gaz suivra le mouvement du fond de l'âme. Partant de cette considération et des applications qu'il a faites au tir des canons aux vitesses de plus de 420 mètres, il établit la relation empirique suivante :

$$V'(A+C) = \frac{b\,v\,R^2}{r^2} + \frac{p\,v}{2} + 420\,p, \qquad (10)$$

dans laquelle outre les notations précédentes on représente par :

V' la vitesse du recul du système formé du canon et de l'affût.

A la masse de l'affût.

Les résultats de cette formule sont fort souvent d'une exactitude satisfaisante.

Cependant quoiqu'on ait fait, on n'est pas encore parvenu à établir une relation, vraie pour tous les cas, entre la quantité de mouvement de la pièce et celle du projectile. Les nombreuses expériences, faites avec le pendule balistique et avec le canon pendule ou fusil pendule, le démontrent suffisamment. Non seulement les quantités de mouvement de l'arme et du projectile ne sont pas les mêmes, mais les résultats obtenus avec la cible pendule ne concordent pas avec ceux de l'arme pendule, et donnent sur la force motrice de la poudre des indications bien différentes, selon que l'on considère son action sur le projectile ou contre la bouche à feu. Telle poudre semble forte ou vive par la vitesse initiale qu'elle communique au boulet, tandis qu'à l'arme pendule elle est classée faible ou lente, et réciproquement. C'est une vérité dont on devrait être plus généralement convaincu, que les effets de la poudre sur la bouche à feu doivent être appréciés au moyen de la pièce elle-même, et qu'à cette fin l'emploi de l'arme pendule est indispensable.

Ces considérations nous font préférer la voie expérimentale, par le canon pendule, pour déterminer la quantité de mouvement μ transmise à la pièce. Le n° 7 du mémorial de la savante artillerie française contient sur ce sujet des données précieuses. Nous y trouvons qu'avec la charge au tiers, le produit du poids de la pièce par la vitesse de recul du canon pendule de 12 est en moyenne 4332 : divisant ce nombre par la gravité $g = 9{,}809$, nous obtenons en nombre rond, pour la quantité de mouvement transmise au canon de 12 :

$$\mu = \frac{4{,}332}{9{,}809} = 442. \qquad (11)$$

La quantité de mouvement de recul du canon de 6 ne nous étant pas connue expérimentalement, nous prendrons pour l'exprimer la moitié du nombre relatif au calibre de 12.

Nous aurons pour la quantité de mouvement de recul du canon de 6 :

$$\mu = 221. \qquad (12)$$

Au moyen de ces données, et des moments d'inertie des canons de 6 et de 12, trouvés pratiquement dans les expériences que nous allons supporter, on pourra déjà faire quelques applications de la théorie des percussions des bouches à feu sur leurs affûts.

FORMULES pour la détermination pratique des moments d'inertie des corps solides à l'aide du pendule à axe horizontal.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

Ces formules ont déjà été exposées dans notre ouvrage sur la fabrication des canons, nous les reproduisons afin qu'on ne soit pas obligé d'y recourir : nous supposons d'ailleurs connus les principes de mécanique sur lesquels elles reposent.

§ 4. Relation entre le moment d'inertie total et les moments d'inertie partiels d'un assemblage de deux corps, relativement a un axe donné.

Supposons un pendule dont les éléments sont invariables, c'est-à-dire dont la masse, le moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension, et la distance de son centre de gravité relativement à cet axe ne puissent changer : et supposons en outre que le pendule soit construit de manière que l'on puisse y placer un canon dans une position déterminée et l'y fixer tout en conservant ces éléments intacts.

Il suffira à cet effet que le centre de gravité du canon se trouve, après son placement, dans le plan passant par l'axe de suspension et par le centre de gravité du pendule : et que celui-ci présente un appui convenable pour la pièce. La bouche à feu pourra d'ailleurs être consolidée dans sa position, par des coins se mouvant dans des coulisses parallèles à l'axe de suspension ou par des vis de pression de même direction, de sorte que le déplacement de ces objets, à l'effet d'amener le canon dans la position voulue, ne puisse modifier aucun des éléments du pendule.

Le pendule considéré isolément, aura donc toujours son centre

de gravité dans la même position, et un même moment d'inertie relativement à l'axe de rotation, qu'il soit chargé d'un canon ou qu'il ne le soit pas.

Soient :

M la masse du pendule.

m la masse du canon.

$M' = M + m$ la masse du pendule assemblé avec le canon.

$M y^2$ le moment d'inertie du pendule relativement à l'axe de suspension.

$m z^2$ le moment d'inertie du canon placé sur le pendule relativement à l'axe de suspension.

$M' u^2$ le moment d'inertie relativement à l'axe de suspension du système formé du pendule et du canon réunis.

Le moment d'inertie total étant égal à la somme des moments d'inertie partiels, on a la relation,

$$M' u^2 = (M + m) u^2 = M y^2 + m z^2. \qquad (13)$$

Les positions des centres de gravité du pendule seul et du canon étant connues, on en déduit la distance à l'axe de suspension du centre de gravité du système formé du pendule et de la pièce réunis. En faisant ensuite osciller le système, on en déduit la longueur du pendule simple synchrone et par suite le moment d'inertie du système : il s'ensuit que, dans la formule 13, il n'y a que le moment d'inertie du canon seul qui puisse être considéré comme inconnu, et en la résolvant, par rapport à $m z^2$ on trouve

$$m z^2 = (M + m) u^2 - M y^2. \qquad (14).$$

---

§ 5. RELATION ENTRE LE MOMENT D'INERTIE D'UN PENDULE RELATIVEMENT A SON AXE DE SUSPENSION, LA DISTANCE DE SON CENTRE DE GRAVITÉ AU MÊME AXE ET LA LONGUEUR DU PENDULE SIMPLE SYNCHRONE.

Soient :

L la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule de la masse M.

D la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension.

MK^2 Le moment d'inertie du pendule par rapport à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension.

La théorie du pendule composé fait voir que l'on a entre ces quantités la relation $L = \frac{K^2 + D^2}{D}$. (15)

Fesons disparaître le dénominateur et multiplions les deux membres par la masse M, nous aurons :

$$M(K^2 + D^2) = MLD. \qquad (16)$$

Le premier membre de cette équation exprime le moment d'inertie du pendule relativement à l'axe de suspension, parce que ce moment est égal à celui MK^2, augmenté du produit de la masse M par le carré D^2 de la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension : nous concluons donc d'après le second nombre de cette équation que :

« Le moment d'inertie d'un pendule relativement à son axe » de suspension est égal au produit de sa masse M par la lon- » gueur L du pendule simple synchrone, multiplié par la dis- » tance D de son centre de gravité à l'axe de suspension. »

---

§ 6. CONNAISSANT LA DISTANCE A L'AXE DE SUSPENSION DES CENTRES DE GRAVITÉ PARTIELS DU PENDULE ET DU CANON FIXÉ AU PENDULE, EXPRIMER EN FONCTIONS DE CES QUANTITÉS LA DISTANCE AU MÊME AXE DU CENTRE DE GRAVITÉ DU SYSTÈME FORMÉ DU PENDULE ET DU CANON RÉUNIS.

Soient outre les notations précédentes :

D' la distance à l'axe de suspension du centre de gravité du système formé du pendule et du canon réunis.

d la distance à l'axe de suspension du centre de gravité du canon seul.

P le poids du pendule.

C le poids du canon.

Nous supposons que, lorsque le pendule est au repos, son centre de gravité et celui du canon se trouvent dans un même plan vertical passant par l'axe de suspension.

Nous avons la relation connue.

$$D' = \frac{M D + m d}{M + m} = \frac{P D + C d}{P + C}. \qquad (17).$$

---

§ 7, LES LONGUEURS DES PENDULES SIMPLES, SYNCHRONES AVEC LE PENDULE SEUL ET AVEC LE PENDULE CHARGÉ DU CANON, ÉTANT CONNUES, EXPRIMER EN FONCTION DE CES QUANTITÉS LE MOMENT D'INERTIE DU CANON CHARGÉ SUR LE PENDULE, RELATIVEMENT A UNE DROITE PASSANT PAR SON CENTRE DE GRAVITÉ ET PARALLÈLE A L'AXE DE SUSPENSION.

Soient outre les notations précédentes :

L' la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé de la bouche à feu.

$(M + m) K'^2$ le moment d'inertie du pendule chargé du canon, pris relativement à une droite parallèle à l'axe de suspension et passant par le centre de gravité du système.

$m x^2$ le moment d'inertie du canon relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension ; $m x^2$ est la quantité inconnue cherchée.

Les moments d'inertie pris relativement à l'axe de suspension, sont :

1° Pour le pendule seul $M (K^2 + D^2)$.

2° Pour le canon mis sur le pendule $m (x^2 + d^2)$.

3° Pour le système formé de l'assemblage du pendule et du canon $(M + m) (K'^2 + D'^2)$.

L'égalité devant exister entre l'expression (3°) et la somme des expressions 1° et 2° on a

$$(M + m)(K'^2 + D'^2) = M (K^2 + D^2) + m (x^2 + d^2), \qquad (18)$$

L'application de la formule (16) donne :

$$M(K^2 + D^2) = M\,L\,D\,, \qquad (19)$$

$$(M + m)(K'^2 + D'^2) = (M + m)\,L'\,D'. \qquad (20)$$

Substituant dans l'éq. (20) pour D′ sa valeur (17) il vient

$$(M + m)(K'^2 + D'^2) = (M\,D + m\,d)\,L'. \qquad (21)$$

Egalant les seconds membres des équations (18) et (21) on a

$$(M\,D + m\,d)\,L' = M\,L\,D + m\,(x^2 + d^2). \qquad (22)$$

On en déduit pour le moment cherché d'inertie du canon relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension ,

$$mx^2 = L'(M\,D + m\,d) - M\,L\,D - m\,d^2. \qquad 23)$$

Cette équation se prête mieux au calcul en multipliant les deux membres par la gravité g, et exprimant les masses en fonction des poids correspondants, on a alors :

$$C\,x^2 = L'\,(P\,D + C\,d) - P\,L\,D - C\,d^2. \qquad (24)$$

Pour soulager la mémoire nous rappellerons les quantités que ces lettres expriment.

$m\,x^2$ moment d'inertie du canon relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension.

C poids du canon.

L′ longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé de la bouche à feu.

P poids du pendule non chargé.

D distance du centre de gravité du pendule non chargé à l'axe de suspension.

d distance du centre de gravité du canon à l'axe de suspension.

L longueur du pendule simple synchrone avec le pendule non chargé.

m masse du canon.

M masse du pendule non chargé.

Les quantités P, D, C, d sont les données de la question : on connaîtra L et L′ en faisant successivement osciller le pendule d'abord seul puis chargé du canon : on aura alors tout ce qu'il faut pour calculer C x^2 ; et divisant ensuite par $g = 9,809$, le quotient sera le moment d'inertie cherché $m\,x^2$.

RELATION DES EXPÉRIENCES.

Description du pendule.

Le pendule se composait d'un plateau de balance en bois suspendu à une certaine distance d'un essieu horizontal en fer. Cet essieu était logé dans un encastrement pratiqué sous un corps d'essieu en bois et assemblé par des frettes de fer et des coins chassés avec force. Quatre montants en bois, partant des angles du plateau se réunissaient deux à deux contre le corps d'essieu en bois : ils étaient chacun recouverts d'une bande de fer, dont le bout replié sous le plateau reliait celui-ci invariablement au corps d'essieu. Les bandes de fer étaient assujeties aux montants par des clous d'applicage et des vis à bois.

Le plateau, d'une solidité suffisante pour le poids du canon, était formé de deux rangées de madriers de 0^m 06 d'épaisseur, croisés à angle droit, et réunis entr'eux par des chevilles et des vis.

Les montants étaient rendus solidaires entr'eux par des traverses en bois, et par des arcs-boutants qui servaient en même temps à les maintenir d'équerre sur le corps d'essieu en bois.

Le pendule oscillait sur deux couteaux en acier, fixés à l'essieu au moyen d'une tige traversant le trou d'esse et rivée du côté opposé au tranchant.

Le pendule reposait sur deux supports en bois, suffisamment élevés et assez écartés pour lui livrer passage lorsqu'il était en mouvement.

Une plaque en fer forgé d'une épaisseur convenable était clouée

à la partie supérieure de chacun des supports. Une rainure creusée sur chacune des plaques, dans le prolongement l'une de l'autre et de niveau, servait de crapaudine ou de gouttière propre à recevoir le tranchant du couteau. On donnait aux supports la stabilité et la force d'inertie nécessaires, en les chargeant de masses pesantes, telles que des bouches à feu, servant de lest, et placées sur les traverses qui réunissaient les pieds des supports.

Le plateau était horizontal lorsque le pendule était au repos.

Des lignes, marquées sur les côtés du pendule, indiquaient les traces du plan passant par l'axe de suspension et par le centre de gravité : par construction elles se trouvaient dans un même plan vertical lorsque le plateau était horizontal.

On reconnaissait, à l'aide de points de repère, les distances à l'axe de suspension des canons placés sur le plateau.

De forts étriers en fer étaient fixés sous le plateau et servaient à soutenir des chantiers en fonte à canon, propres à augmenter la masse du pendule et à en abaisser le centre de gravité.

PLANCHE I.

Figure (1). Projection du pendule, avec un canon sur le plateau vu du côté de la bouche.

Figure (2). Projection et coupe par le plan de symétrie perpendiculaire à l'essieu.

CD, C,D, supports du pendule.

EE, essieu en fer, servant d'axe au pendule.

ee, couteaux fixés aux trous d'esse.

FF, canon placé sur le plateau en bois, ayant le centre de gravité dans le plan qui contient le centre de gravité du pendule et l'axe de suspension.

Le canon était soutenu par des coins en bois, suffisamment rapprochés pour que l'axe de l'âme fut horizontale lorsque le pendule était au repos.

Des coulisses adaptées au plateau parallèlement à l'axe de suspension, permettaient suivant les besoins, de rapprocher ou d'écarter les coins qui soutenaient le canon, sans changer en rien

l'ordonnée verticale du centre de gravité du pendule, ni son moment d'inertie relativement à l'axe de rotation.

HH, H'H', étriers en fer fixés sous le plateau.

GG, chantiers en fonte chargés et calés sur les étriers, pour augmenter la masse du pendule et en abaisser le centre de gravité.

II, KK, traverses des supports, que l'on chargeait de bouches à feu pour en augmenter la stabilité.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU PENDULE.

Poids du pendule.

On pesait séparément, le pendule proprement dit, puis les chantiers ainsi que les coins en bois que l'on se proposait d'employer pour assujettir les chantiers et le canon. Le poids total se composant de ces poids partiels et a été trouvé de 1056 $^{kil.}$ 570.

Etablissement du pendule.

Les pesées étant faites, le pendule a été placé sur ses supports, en faisant entrer les tranchants des couteaux de l'essieu dans les plaques ou coussinets en fer fixés à la partie supérieure des supports. On s'est assuré que les rainures étaient creusées convenablement, de manière à permettre au pendule d'osciller librement, sans toutefois pouvoir ballotter, de sorte que les oscillations se faisaient sur un axe unique.

On a ensuite déposé les chantiers sur les étriers, sous le plateau, en les fesant avancer ou reculer jusqu'à ce que le plateau fut horizontal; ce dont on s'assurait à l'aide d'un niveau a bulle d'air. D'après ces dispositions le centre de gravité du système se trouvait

dans un plan passant par l'axe de rotation et perpendiculaire à celui du plateau.

Les traces de ce plan ont été marquées sur les côtés du pendule au repos à l'aide de fils à plomb appliqués contre ces côtés.

Les chantiers ont été consolidés dans leurs positions en les serrant avec des coins en bois jusqu'à ce qu'ils ne pussent ni ballotter ni glisser.

En appliquant au besoin des coups de masse contre les chantiers, on les déplaçait suffisamment dans le sens voulu, pour ramener le centre de gravité du système dans le plan passant par l'axe de suspension et perpendiculaire au plateau.

L'arrangement des chantiers était tel, que le pendule présentât à peu-près la même masse à droite et à gauche du plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de suspension.

Le poids des coins en bois non employés était déduit du total des pesées.

Distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension.

On s'est servi du procédé suivant :

Le pendule a été écarté de la verticale de l'angle θ sous l'effort φ parallèle au plan du plateau et perpendiculaire à l'axe de suspension : en d'autres termes, l'effort φ était dirigé perpendiculairement au plan passant par l'axe de suspension et par le centre de gravité du pendule.

L'effort φ était mesuré par un dynamomètre à ressort. Soient :

D, la distance cherchée du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension.

x la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'axe du pendule sur la direction de la force φ.

P le poids du pendule.

On a entre ces quantités la relation

$$D = \frac{\varphi\, x}{P\, im\, \theta} \qquad (25).$$

On mesurait la longueur x à l'aide des points de repère marqués à cet effet sur les côtés du pendule.

Le dynamomètre était attaché au pendule au moyen d'une corde fixée à un clou enfoncé sur le côté opposé du plateau. On inclinait de plus en plus le pendule jusqu'à ce que la corde devint parallèle au plan du plateau.

Dans cette situation l'aiguille indiquait sur le ressort dynamétrique le poids auquel correspondait l'effort φ.

En mesurant la distance x on tenait compte de la moitié de l'épaisseur de la corde.

Les expériences ont donné les résultats suivants :

$$\theta = 12^{\circ}$$

$$x = 1^{m}\ 522.$$

$$P = 1056\ ,\ 370$$

$$\varphi = 238^{kil.}\ 645.$$

De l'équation (25) on déduit par l'introduction de ses valeurs :

$$D = 1^{m}\ 655.$$

Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule expérimenté.

Pour déterminer cette longueur, on a compté le nombre d'oscillations que le pendule faisait en une minute, et on a calculé la longueur du pendule simple synchrone par la formule :

$$L = \frac{3600\ l}{N^{2}} \qquad (26).$$

Dans laquelle on représente par

L la longueur du pendule simple Synchrone.

l la longueur du pendule simple à secondes, correspondante à la latitude du lieu de l'expérience.

N le nombre d'oscillations que fait le pendule expérimenté en une minute.

La valeur de l a été trouvée au moyen de la relation entre la longueur du pendule simple à secondes et la latitude du lieu ; relation de laquelle il résulte que la longueur du pendule simple à secondes est proportionnelle au double du cosinus de la latitude. Cette formule est :

$$l = a(1 - b\cos. 2\chi)$$

dans laquelle ;

a et b sont des coëfficients numériques résultats de l'expérience :

χ la latitude du lieu.

Remarquant que $\cos 2\chi = 2\cos.^2\chi - 1 = 1 - 2\sin^2\chi$ et mettant pour a et b les données de l'expérience, il vient

$$l = 0{,}990555 \times 0{,}005679 \sin^2\chi \qquad (27).$$

Suivant l'annuaire de l'observatoire de Bruxelles la latitude à Anvers est

$$\chi = 51° - 15' - 17''$$

cette valeur introduite dans l'équation (27) donne pour la longueur du pendule simple à secondes dans cette ville

$$l = 0{,}994 \qquad (28).$$

Le pendule ayant été légèrement écarté de la verticale et abandonné ensuite à lui-même, on a compté le nombre des oscillations pendant les 4 ou 5 premières minutes du mouvement : puis on lui a imprimé une nouvelle impulsion et on a recommencé à compter les oscillations. Le nombre total d'oscillations, divisé par le temps employé à les faire a donné pour moyenne

$$N = 43 \qquad (29).$$

Au moyen des valeurs (28) et (29) l'équation (26) donne pour la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule expérimenté :

$$L = 1^m, 935 \qquad (30).$$

Tels sont les éléments du pendule qui a servi aux expériences dont nous rapportons les résultats. Ces éléments n'ont pas varié ;

pour s'en assurer on avait soin de les vérifier de nouveau après chaque expérience.

Pour distinguer ce pendule de celui formé en le chargeant d'un canon, nous le nommerons *pendule non chargé ;* l'autre sera le *pendule chargé.*

Erreur occasionnée par la perte du poids du pendule dans l'air.

Le pendule plongé dans l'air perd une partie de son poids, ce qui diminue l'action de la gravité terrestre. Mais il est facile de s'assurer que cette perte ne peut influer sensiblement sur les résultats obtenus.

Le poids du bois introduit dans l'appareil est au plus de 90 kilogrammes, ce qui répond à un volume de 165,64 décimètres cubes, en prenant suivant l'aide mémoire de l'artillerie française, 0,55 pour la densité du sapin employé.

Le restant du poids du pendule consiste en 966^{k},37 de fer, dont le volume est 134,22 décimètres cubes, 7, 2 étant la densité de la fonte. Les deux volumes réunis font 298 décimètres cubes; d'où il résulte que le pendule plongé dans l'air perd en poids celui de 298 litres de ce fluide.

La densité de l'air étant environ $\frac{1}{850}$ de celle de l'eau, les 298 litres d'air pèseront 0^{k},351 quantité entièrement négligeable devant le poids du pendule 1056$_{k}$,37.

Nous ne nous occuperons pas de l'effet que produit la résistance de l'air au mouvement du pendule, effet que les géomètres ont démontré être entièrement négligeable pour de petites oscillations.

Détermination de la position du centre de gravité des canons.

On a pris les dispositions suivantes pour déterminer la distance du centre de gravité de la pièce au plan vertical passant par l'axe des tourillons lorsque l'âme est horizontale.

On a établi solidement deux chantiers en fonte avec les deux bords supérieurs de niveau, parallèles et suffisamment écartés.

Le canon a été placé entre les chantiers et suspendu par les tourillons, la lumière au dessous. L'axe de l'âme a été maintenu horizontal au moyen de poids attachés à la volée.

Dans cette position de la lumière, le centre de gravité de la pièce était le plus bas possible, et l'équilibre obtenu était stable. Pour attacher les poids à la volée, on s'est servi d'un grand anneau de fer, suffisamment solide et assez grand pour pouvoir passer sur le bourrelet de la pièce sans le toucher.

L'anneau était placé contre l'astragale, et présentait au point de contact avec la bouche à feu une partie tranchante en forme de couteau, dont l'arête était dans le plan passant par le milieu de l'épaisseur de l'anneau. De cette manière il pouvait osciller librement sur la pièce sans que son point de contact changeât. Il se terminait à la partie inférieure par des crochets auxquels on attachait des poids.

Soient :

C le poids du canon.

x la distance du centre de gravité au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

l la distance du point de contact de l'anneau au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

a le poids de l'anneau.

φ le poids du contre-poids suspendu à l'anneau, rendant horizontale la position de l'âme.

On a entre ces quantités la relation :

$$Cx = (a + \varphi)\, l$$

d'où

$$x = \frac{(a + \varphi)\, l}{C}$$

Le tableau suivant indique les résultats obtenus avec les sept canons qui ont servi aux expériences : comme renseignement utile on a aussi indiqué les distances de l'axe des tourillons à la tranche de la bouche et au derrière de la plate bande de culasse.

DÉSIGNATION de la PIÈCE.	NUMÉRO de la PIÈCE.	LIEU ET ANNÉE de la coulée.	POIDS de la PIÈCE. kilog.	Distance du centre de gravité de la pièce au plan vertical passant par l'axe des tourillons		Distance de l'axe des tourillons.		OBSERVATIONS.
				Pour chaque canon expérimenté mètres.	Moyenne par calibre.	à la tranche de la bouche	au derrière de la plate-bande de culasse	
Canon court de 6 en bronze de campagne.	194 B⁶	La Haye 1821.	480	0,0700	0,0757	0,9275	0,6910	
Idem.	50	Liége 1855.	458	0,0814		0,9250	0,6925	
Canon long de 6 en bronze de siége.	53 x^{12}	La Haye 1800.	882	0,0936	0,09385	1,8950	1,0988	
Idem.	800⁵	La Haye 1784.	883	0,0941		1,8850	1,1023	
Canon court de 12 en bronze de campagne.	20	Liége 1849.	828	0,0941	0,09125	1,0950	0,8210	
Idem.	26	Liége 1856.	881	0,0884		1,0955	0,8190	
Canon long de 12 en bronze de siége.	113 M¹¹	La Haye 1797.	1641,5	0,0988	0,0988	1,7165	1,2760	

Placement du canon sur le pendule.

On amenait le canon sur le plateau du pendule, dans une direction perpendiculaire à celle de l'axe de suspension et en le faisant avancer ou reculer jusqu'à ce que le plateau devint horizontal, lorsque le pendule était au repos, ce dont on s'assurait par l'emploi d'un niveau.

Sans changer en rien l'horizontalité du plateau, on mettait les tourillons de niveau. On agissait ensuite sur la volée, pour rendre l'âme horizontale, et on assurait la position de la pièce par des coins se mouvant dans des coulisses ménagées sur le plateau parallèlement à l'axe de suspension.

Quelques tâtonnements suffisaient pour amener la pièce dans la position voulue.

Il fallait avoir soin, dans ces opérations qui donnaient lieu à des manœuvres de force inutiles à décrire, de ne pas toucher aux chantiers en fonte chargés sur les étriers sous le plateau du pendule, et d'éviter les chocs qui auraient pu altérer les données du système en faussant l'essieu qui servait d'axe de suspension. Un quart de cercle avec niveau à bulle d'air, modèle prussien, appliqué contrela tranche de la bouche, servait à vérifier l'horizontalité de l'âme.

Eléments du pendule chargé.

Distance du centre de gravité du canon à l'axe de suspension.

Des points de repère, marqués sur les supports du pendule et contre les murs du local, servaient à disposer des règles horizontales, dont on connaissait les distances au plan horizontal passant par l'axe de suspension. Il était ensuite facile de mesurer, par des moyens qu'on imaginera sans peine, la distance de l'axe de l'âme à l'une de ces règles, et par suite à l'axe de suspension du pendule.

Cette distance était en même temps celle du centre de gravité de la pièce à l'axe de suspension, car ce centre de gravité peut, sans erreur sensible, être considéré comme étant sur l'axe de l'âme.

Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé.

La longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé, a été déterminée de la même manière que pour celui non chargé, par le nombre des oscillations qu'il faisait dans un temps donné. On en a déduit le nombre des oscillations par minute.

L'opération a été répétée plusieurs fois pour chaque pièce, afin d'avoir une moyenne plus exacte.

L'application des formules (26) et (28) a permis ensuite de calculer les longueurs L', du pendule simple synchrone avec le pendule chargé successivement des différents canons expérimentés. Ces résultats sont consignés dans le tableau qui va suivre.

Calcul du moment d'inertie de la bouche à feu.

Le moment d'inertie de la bouche à feu a été calculé, en introduisant dans la formule (24), les données qui s'y rapportent, trouvées ainsi que nous venons de l'expliquer, et divisant par $g = 9{,}809$ la valeur qui en résulte pour Cx^2.

Le tableau suivant contient tous les éléments nécessaires à ce calcul.

Tableau contenant tous les éléments fournis par l'expérience pour calculer les moments d'inertie des canons.

DÉSIGNATION de la PIÈCE.	NUMÉRO de la PIÈCE.	LIEU et année de la COULÉE.	Poids du canon, valeur de C.	POIDS du pendule non chargé valeur de P.	Distance du centre de gravité du pendule non chargé à l'axe de suspension, valeur de D.	Distance de l'axe du canon chargé sur le pendule à l'axe de suspension, valeur de d.	Nombre d'oscillations par minute du pendule : non chargé	Nombre d'oscillations par minute du pendule : chargé.	Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule : non chargé, valeur de L.	Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule : chargé, valeur de L'.	Moment d'inertie du canon relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe des tourillons. : pour chacun des canons	Moment d'inertie du canon relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe des tourillons. : moyenne par calibre.
Canon court de 6 en bronze de campagne.	194 B⁶	La Haye 1821.	480			1,403	»	44,2		1,8317	11,0205	12,369
Idem.	50	Liége 1855.	458			1,403	»	44		1,8483	13,7182	
Canon long de 6 en bronze de siége.	53 z^{12}	La Haye 1800.	882			1,399		43,93		1,8542	41,7800	42,151
Idem.	80 0⁵	La Haye 1784.	883	1056kil.370	1,655	1,403	43	43,76	1,9353	1,8686	42,5230	
Canon court de 12 en bronze de campagne.	20	Liége 1849.	828			1,372		44,5		1,8070	27,5540	30.481
Idem.	26	Liége 1856.	881			1,370		44,4		1,8152	33,4283	
Canon long de 12 en bronze de siége.	113 M″	La Haye 1797.	1641,5			1,360		43,8		1,8656	102,7010	102,701

Motifs pour lesquels il n'y a eu que sept canons expérimentés.

Le pendule a dû être modifié plusieurs fois avant de pouvoir servir aux expériences rapportées. Il a été rendu successivement plus pesant, en le chargeant davantage de chantiers à canon, et on a dû prendre des dispositions pour le rendre plus solide : il a fallu remplacer l'essieu de campagne, qui servait d'axe, par un essieu de côte beaucoup plus fort.

Cet essieu, malgré sa force, a pris une courbure sous la charge du canon de 12 long en bronze, avec lequel nous commencions la série des expériences qui viennent d'être rapportées.

Mais nous nous sommes assurés que cette courbure de l'essieu est demeurée invariable. Les données concernant le pendule ont donc été prises après l'inflexion, qui est restée la même après l'enlèvement du canon de 12, mais nous n'avons pas jugé convenable de continuer avec les forts calibres.

Il est à désirer que ces expériences soient reprises avec des appareils convenables et étendues à toute notre artillerie.

Comparaison entre les moments d'inertie des canons expérimentés.

Les canons expérimentés étaient du modèle belge, qui est le même que celui de Hollande.

Les canons de campagne de 6 et de 12, mesurés en calibres, forment des corps géométriques à peu près semblables : il en est de même pour les canons longs du même calibre. On peut s'en assurer par le tableau suivant; qui indique quelques données essentielles sur ces bouches à feu.

Comparaison entre quelques dimensions exprimées en calibres, des canons de 6 et de 12 en bronze courts et longs.

DÉSIGNATION des CANONS.	LONGUEUR de l'âme en calibres.	POIDS du canon en fonctions du poids du boulet.	MOMENT d'inertie du canon.	
Canon court de 6 en bronze de campagne.	16	143	12,369	
Canon court de 12 en bronze de campagne.	15	143	30,481	
Canon long de 6 en bronze de siége.	26	310	42,151	
Canon long de 12 en bronze de siége.	24	292	102,701	

Les pièces de campagne de 6 et de 12 sont des corps géométriques sensiblement semblables, et il en est de même pour les canons longs des mêmes calibres : si nous divisons les moments d'inertie des canons de campagne par ceux de siége de même calibre, nous obtenons des quotients à peu près égaux, savoir :

$$\frac{\text{moment d'inertie du canon de 6 court } 12{,}369}{\text{moment d'inertie du canon de 6 long } 42{,}151} = 0{,}2934$$

$$\frac{\text{moment d'inertie du canon de 12 court } 30{,}481}{\text{moment d'inertie du canon de 6 long } 102{,}701} = 0{,}2968$$

Ces rapports étant égaux à quelques millièmes près, il faut en conclure que les résultats des expériences sont d'une exactitude satisfaisante.

Le canon de 6 long a à peu près le même poids que celui de 12 court, et leurs moments d'inertie sont respectivement

42,151 pour le canon de 6 long,
30,481 id. 12 court.

Le moment d'inertie du canon de 6 long l'emporte d'environ $\frac{2}{5}$ sur celui de 12 court. De deux bouches à feu de même poids et de calibres différents, tirant avec la même charge de poudre et lançant des projectiles de poids égaux, c'est celle de petit calibre qui aura le plus grand moment d'inertie et qui offrira le plus de stabilité dans le tir.

Les canons en fonte ont généralement le même poids que ceux en bronze de même calibre, et des épaisseurs plus fortes, mais moins de longueur, afin de compenser l'infériorité de la tenacité de la fonte. Les canons en fonte ont donc une masse plus concentrée, et possèdent des moments d'inertie moins considérables que ceux de bronze du même calibre : aussi fatiguent-ils davantage leurs affûts et la vis de pointage.

Les obusiers courts ont ces défauts à un degré plus marqué.

II. — *Expériences sur la détermination pratique des moments d'inertie des affûts,*

PAR

COQUILHAT,

LIEUTENANT COLONEL D'ARTILLERIE,
COMMANDANT DU MATÉRIEL DE LA PLACE D'ANVERS, OFFICIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD,
DÉCORÉ DE LA CROIX COMMÉMORATIVE DE BELGIQUE,
ET DE PLUSIEURS ORDRES MILITAIRES ET ÉTRANGERS.

§ 1. AFFUT PENDULE.

Il convenait de compléter nos expériences, concernant les moments d'inertie des canons, en les étendant aux affûts correspondants, afin de permettre l'application des formules qu'on déduit de la théorie des percussions produites dans le tir. Ayant opéré sur les canons en bronze de 6 et de 12 longs et courts, nous avons recherché les moments d'inertie des affûts de campagne M 1853 de 6 et de 12, et ceux N.M. de siége des mêmes calibres.

Le pendule expérimenté, pour la recherche des moments d'inertie des canons, ne présentait pas des intervalles, assez grands entre les montants du plateau, pour permettre le passage de l'affût et sa fixation dans une position convenable.

Mais il était facile de convertir l'affût lui-même en un pendule, en le suspendant la crosse en bas, par les extrémités de l'essieu sur deux appuis solides et de même niveau.

Il était essentiel d'éviter les frottements et le déplacement de l'axe de suspension. A cet effet on avait fixé, aux trous d'esse, deux petits couteaux en acier, dont les tranchants étaient sur une même ligne droite, parallèle à l'axe de l'essieu, et perpendiculaire au plan de symétrie de l'affût. Ces tranchants étaient reçus chacun dans une gorge peu profonde, ou crapaudine, creusée dans une épaisse plaque de fer vissée à la partie supérieure des deux appuis.

L'affût, suspendu au moyen des couteaux sur les gorges des plaques, oscillait, librement et sans frottement sensible, autour d'un axe unique de rotation.

Les couteaux étaient fixés aux trous d'esse, à l'aide d'une tige dont la branche recourbée s'y adaptait parfaitement.

La tige débordait le trou d'esse, et était percée d'une fente, dans laquelle on chassait un coin ou clavette de fer, pour serrer le couteau d'une manière invariable contre la fusée de l'essieu.

La tige était courbée de telle manière que la lame du couteau devenait verticale, lorsque l'affût pendule était au repos.

PLANCHE II.

AA. Affût servant aux expériences, faisant fonction de pendule.

B. Supports ou appuis de l'affût.

E. Essieu de l'affût.

C. Plaques en fer forgé, fixées à la partie supérieure des supports, et présentant une gorge pour recevoir les tranchants des couteaux.

d. Couteaux fixés aux trous d'esse.

---

§ 2. LIGNES DE REPÈRE SUR LES SUPPORTS.

Il importait que les traces du plan vertical, passant par l'axe de suspension de l'affût pendule, fussent marquées sur les côtés des supports, et que la position de l'axe lui-même fut reperée, à l'aide de droites parallèles et horizontales connues.

L'axe de suspension devait être horizontal, et les gorges des plaques de fer, dans lesquelles devaient s'engager les couteaux fixés à l'essieu, devaient être dans le prolongement l'une de l'autre.

On s'assurait que l'axe du pendule était horizontal, au moyen d'un niveau, appliqué sur un fil tendu, ou sur une règle que l'on faisait appuyer par une de ses arrêtes sur le fond des gorges ou coussinets de pendule. On relevait au besoin les supports, au moyen de calles en bois chassées au dessous. On vérifiait si les gorges étaient bien dans le prolongement l'une de l'autre, et on les y amenait en dérangeant les supports suivant le besoin.

On jalonnait l'axe avec des tasseaux, placés au dessus des supports, et fixés par des pointes de Paris; et on marquait l'axe du pendule, sur les faces des tasseaux en contact avec le fil tendu sur les gorges des couteaux.

On laissait ensuite pendre deux fils à plomb sur les prolongements de l'axe et contre les supports. Les points de contact servaient, concurremment avec la ligne de l'axe et à l'aide d'une règle et d'un style, à marquer, sur les côtés des supports, les traces du plan vertical passant par l'axe de suspension du pendule.

On menait sur les côtés des supports des droites horizontales dont on annotait les distances à l'axe du pendule.

Enfin à l'aide d'une règle, appliquée verticalement contre les côtés des supports, on traçait des droites dont on mesurait les distances aux traces du plan vertical passant par l'axe de suspension.

On avait ainsi un système de droites horizontales et verticales, dont les distances à l'axe de suspension étaient connues, et qui, dans le cours des expériences, devaient servir à reconnaître les positions relatives de l'axe de suspension et d'un point quelconque de l'affût.

Lignes de repère tracées sur l'affût pendule.

On avait intérêt de marquer sur l'affût au repos les mêmes lignes que sur les supports. A cet effet on suspendait l'affût sur les supports, en faisant entrer les tranchants des couteaux dans les gorges des plaques de fer ou coussinets, et on le maintenait au repos.

On traçait, sur la flèche et sur les flasques de l'affût, un système de droites horizontales et verticales, dont on trouvait les distances à l'axe de suspension en rapportant leurs positions aux droites parallèles horizontales et verticales, marquées sur les supports et dont les distances à l'axe étaient connues.

Il était facile ensuite de diriger une droite sur chaque flasque, indiquant la trace du plan vertical passant par l'axe de suspension de l'affût pendule au repos.

Le centre de gravité de l'affût se trouvait dans le plan de ces traces.

Le système de lignes rectangulaires menées sur la flèche et sur les flasques, servait à reconnaître les distances d'un point quelconque de l'affût à son axe de suspension et au plan passant par cet axe et par son centre de gravité.

---

§ 3. DÉTERMINATION DU NOMBRE DES OSCILLATIONS DE L'AFFUT PENDULE DANS L'UNITÉ DU TEMPS.

L'affût pendule étant suspendu par les couteaux fixés aux fusées de l'essieu, on lui imprimait une petite secousse, et on comptait le nombre des oscillations qu'il faisait en 2 ou 3 minutes.

L'opération ayant été répétée plusieurs fois, on divisait le nombre total des oscillations par le temps employé à les faire, et le quotient donnait le nombre moyen des oscillations pendant une minute.

Détermination de la position du centre de gravité de l'affût.

Le centre de gravité de l'affût se trouvait sur le plan vertical passant par l'axe de suspension de l'affût pendule au repos, plan dont on avait les traces sur les flasques par les procédés décrits. Il ne s'agissait plus que de trouver les points où la droite

passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan de symétrie de l'affût, venait couper ces traces, pour avoir la position exacte de ce centre lui-même. Pour l'obtenir, on employait un procédé analogue à celui décrit dans notre ouvrage sur la fabrication des canons pour trouver le centre de gravité des bouches à feu.

A cet effet, on prenait, extérieurement aux deux flasques et sur les traces du plan passant par l'axe de suspension de l'affût pendule au repos, deux points également éloignés du corps d'essieu en bois ou de la tête des flasques et ces points formaient les centres de deux tourillons propres à suspendre l'affût pour la recherche de son centre de gravité.

L'affût était soulevé par ces tourillons avec le corps de l'essieu horizontal, à l'aide de moyens faciles à concevoir. On attachait avec un cordage des contrepoids à la partie la plus légère jusqu'à ce que les traces du plan passant par l'axe de suspension de l'affût pendule au repos devinssent horizontales.

Le moment de ces contrepoids pris relativement à la droite passant par les centres des tourillons, était égal au produit du poids de l'affût par la distance de son centre de gravité à la ligne des centres des tourillons. Le poids des contrepoids était connu ; on pouvait mesurer le bras de levier des contrepoids ou la distance de la verticale passant par leur point de suspension à la ligne des centres des tourillons; on savait le poids de l'affût par une pesée ; on possédait donc tous les éléments pour déterminer à quelle distance de la ligne des centres des tourillons se trouvait le centre de gravité de l'affût.

Nommons

A le poids de l'affût.

Q le poids des contrepoids.

L la distance de la ligne des centres des tourillons à la verticale passant par le point de suspension des contrepoids.

X La distance cherchée du centre de gravité de l'affût à la ligne des centres des tourillons.

On a l'égalité :

$$LQ = AX$$

d'où

$$X = \frac{LQ}{A}$$

En mesurant la longueur du bras de levier du contre-poids Q on tenait compte de la moitié de l'épaisseur du cordage. Le poids du cordage lui-même était négligé vu son peu d'importance.

L'équilibre de l'affût était rendu stable en plaçant les deux tourillons un peu au dessus du plan vertical passant par l'axe de suspension de l'affût pendule au repos et à égales distances des traces de ce plan et du corps d'essieu en bois.

On répèrait la position du centre de gravité sur les deux flasques, on la rapportait à d'autres points connus et on en déduisait la distance de ce centre à l'axe de suspension de l'affût pendule.

Détermination du moment d'inertie de l'affût pendule pris relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension.

Soient :

M la masse de l'affût.

MK^2 le moment d'inertie de l'affût relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension : laquelle droite est par construction parallèle à l'axe de l'essieu et perpendiculaire au plan de symétrie de l'affût.

D. la distance du centre de gravité de l'affût à l'axe de suspension.

L. la longueur du pendule simple synchrone avec l'affût pendule.

P. le poids de l'affût.

G. la gravité.

N. le nombre d'oscillations de l'affût pendule pendant une minute.

$x = 0{,}994$ la longueur du pendule simple à seconde sous la latitude d'Anvers.

Le poids P de l'affût est donné par une pesée : on en déduit M par l'équation

$$M = \frac{P}{g}.$$

D est connu par les procédés indiqués pour trouver la position du centre de gravité de l'affût relativement à son axe d'oscillation.

N est le résultat des observations faites en faisant osciller l'affût pendule.

L est donné par la relation

$$L = \frac{3600\ x}{N^2}.$$

Enfin on déduira MK^2 de l'équation

$$M(K^2 + D^2) = MLD.$$

§ 4. RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES.

Le tableau suivant contient les résultats des expériences et ceux des calculs relatifs aux moments d'inertie des affûts.

Tableau indiquant les résultats des expériences pour la détermination pratique des moments d'inertie des affûts.

DÉSIGNATION des AFFUTS.	POIDS des AFFUTS.	Distance du centre de gravité de l'affût à l'axe de suspension.	Nombre des oscillations de l'affût pendule par minute.	Longueur du pendule simple synchrone avec l'affût pendule.	Moment d'inertie de l'affût relativement à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de l'essieu.
Affût de 6 de campagne M. 1853.	295k,5	0,3352	49	1,4904	11,6652
Affût de 12 de campagne M. 1853.	352,5	0,3642	44,5	1,8074	18,8886
Affût de 6 de siége N. M.	411	0,493	44	1,8483	24,9378
Affût de 12 de siége N. M.	648	0,610	42,67	1,9654	54,6195

§ 5. DONNÉES NÉCESSAIRES A L'APPLICATION DES FORMULES DÉDUITES DE LA THÉORIE SUR LES PERCUSSIONS EXERCÉES SUR LES AFFUTS DANS LE TIR DES CANONS.

On ne peut appliquer la théorie des percussions éprouvées par les affûts dans le tir des bouches à feu, qu'en connaissant les positions relatives des principales parties qui sont la vis de pointage, les axes des tourillons et de l'essieu, la ligne des points d'appui des roues, le point de contact de la crosse avec le sol.

Le tableau suivant contient les données nécessaires pour l'affût de campagne et de siége de 6 et de 12, dans la supposition qu'il repose sur un plan horizontal. Toutefois, ces données, ayant été obtenues sur un seul objet de chaque espèce, sont des résultats individuels plus ou moins rapprochés des valeurs moyennes.

Tableau contenant les données principales des affûts nécessaires pour appliquer les formules concernant les percussions exercées dans le tir : l'affût étant monté sur ses roues et reposant sur un plan horizontal.

DÉSIGNATION de L'AFFUT.		Poids de l'affût non compris les roues.	Poids des deux roues réunies.	Diamètre des roues.	Hauteur de l'axe des tourillons au dessus du sol.	Hauteur du centre de gravité au dessus du sol.	Distance du centre de gravité au plan horizontal passant par l'axe des tourillons.	Distance du centre de gravité au plan vertical passant par l'axe des tourillons.	Distance du point d'appui de la crosse à la verticale passant par le centre de gravité.	Largeur du cercle de roue.	Distance du centre de gravité à la partie inférieure du flasque.	Distance du centre de gravité au corps d'essieu en fer.	Distance du centre de gravité au corps d'essieu en bois.	Distance entre l'axe de la vis de pointage et l'axe des tourillons.
Affût de campagne M. 1853 de	6.	295,5	201,5	1,45	1,020	0,545	0,475	0,480	1,27	0,072	0,175	0,415		0,640
	12.	352,5	228,5	1,46	1,080	0,600	0,480	0,543	1,35	0,072	0,180	0,457		0,760
Affût de siége N.M. pour canons long en bronze de	6.	411	307,5	1,52	1,200	0,779	0,421	0,625	2,08	0,083	0,077		0,486	1,070
	12.	648	508,3	1,52	1,260	0,825	0,435	0,530	2,20	1,109	0,092		0,376	1,230

III. — *Expériences pour la détermination pratique des moments d'inertie des Roues,*

PAR

COQUILHAT,

LIEUTENANT COLONEL D'ARTILLERIE,
COMMANDANT DU MATÉRIEL DE LA PLACE D'ANVERS, OFFICIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD,
DÉCORÉ DE LA CROIX COMMÉMORATIVE DE BELGIQUE,
ET DE PLUSIEURS ORDRES MILITAIRES ET ÉTRANGERS.

§ 1. APPAREIL D'EXPÉRIMENTATION.

Les expériences, pour la détermination pratique des moments d'inertie des roues, exigeaient un essieu dont les fusées permettent d'ôter et de remettre facilement les roues sans déranger le restant du système. Il suffisait donc d'adapter un essieu, au pendule à plateau qui avait servi à la recherche des moments d'inertie des bouches à feu, pour obtenir un appareil très convenable.

Le corps de l'essieu a été placé, sur le plateau du pendule, horizontalement et parallèlement à l'axe de suspension et avec son centre de gravité dans un même plan passant par cet axe et par le centre de gravité du pendule.

On était assuré que l'essieu se trouvait dans cette position, lorsque le plateau qui était primitivement horizontal restait encore de niveau après la pose de l'essieu.

Le centre de gravité des roues coïncidant avec leur axe de figure, le plateau devait rester horizontal avec ou sans roues.

Nous nommons pendule à essieu, ou appareil à essieu, celui

formé du pendule et de l'essieu réunis. Le pendule à roues est celui qui résulte de l'adjonction des deux roues au système.

PLANCHE III, PENDULE A ROUES.

E.E. Axe de suspension au pendule à roues.

E'E' Essieu adapté au plateau du pendule.

R.R. Roues du modèle à expérimenter passées sur les fusées de l'essieu.

On expérimentait sur deux roues à la fois, afin de rendre plus sensibles les résultats de leur adjonction au pendule. Il suffisait de diviser par deux les moments d'inertie, obtenus pour les deux roues, pour avoir celui d'un seul de ces objets.

Le pendule sans l'essieu, était le même que celui qui avait servi pour la recherche des moments d'inertie des canons; à l'exception qu'au lieu de mettre des chantiers en fonte, sous le plateau, on y avait placé de vieux essieux en fer, afin qu'il fût plus léger, et que son poids devînt plus comparable à celui des deux roues.

Les essieux étaient fixés à demeure, à l'aide de calles en bois et de coins en fer, retenus par des clous.

Les roues étaient serrées, contre le corps de l'essieu, de manière à ne pouvoir tourner, par des clavettes chassées dans les trous d'esse.

La masse du système était répartie de manière que le plateau fût horizontal quand le pendule était au repos.

Le poids de cet appareil sans l'essieu était de 566 kil.

On avait marqué, sur les côtés du pendule au repos, les traces du plan vertical passant par l'axe de suspension et contenant son centre de gravité, et sur ces traces on avait mené plusieurs perpendiculaires dont les distances à l'axe de suspension étaient connues. Ces lignes servaient de repère pour apprécier la distance d'un point quelconque du pendule à l'axe de rotation.

Pour trouver, pratiquement, la position du centre de gravité de ce système, on avait vissé sur les côtés deux vis-à-bois suffisamment solides, à égales distances de l'axe de suspension, et sur les traces du plan vertical passant par cet axe quand le pendule était au repos. Ces vis servaient ensuite de tourillons, pour suspendre

l'appareil, que l'on chargeait de contrepoids à une extrémité, jusqu'à ce que les traces du plan dont nous venons de parler devinssent horizontales.

Connaissant le poids de ces contrepoids et leur distance à l'axe des petits tourillons, il était facile d'en déduire la position du centre de gravité du pendule.

Soient :

Q le poids du contrepoids.

l la distance de son point d'attache au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

P le poids du pendule.

x la distance du centre de gravité du pendule au plan vertical passant par l'axe des petits tourillons, on a entre ces quantités la relation.

$$x = \frac{Q\,l}{P}$$

Les données de l'expérience ont été les suivantes :

$$Q = 75^k$$
$$l = 0{,}613$$
$$P = 566$$

Il en est résulté :

$$x = 0{,}081.$$

L'axe des petits tourillons se trouvait à 1,265 de celui de suspension, il s'en suit que ce dernier était distant du centre de gravité du pendule de $1{,}265 - 0{,}081 = 1^m{,}184$.

La distance du plateau à l'axe de suspension était $1^m{,}534$.

---

§ 2. PENDULE A ESSIEU POUR EXPÉRIMENTER LES ROUES DE 6 DE CAMPAGNE ET DE SIÉGE.

Le pendule reposant sur ses couteaux, on a placé sur le plateau un essieu de campagne n° 1, pesant 65 kilogrammes et dirigé parallèlement à l'axe de suspension.

Le centre de gravité de l'essieu était, avec celui du pendule sans essieu, dans un même plan passant par l'axe de suspension. Par cette disposition le plateau était horizontal, lorsque le pendule à essieu était au repos. L'essieu a été fixé à demeure par les moyens indiqués, après qu'on s'était assuré qu'il était convenablement placé.

Pour trouver la distance du centre de gravité du pendule à essieu à l'axe de suspension, on s'est servi de la formule :

$$x = \frac{\mathrm{P}\,l + \mathrm{E}\,l'}{\mathrm{P} + \mathrm{E}}$$

Dans laquelle on représente par :

l la distance du centre de gravité du pendule sans essieu à l'axe de suspension.

l' la distance du centre de gravité de l'essieu déposé sur le plateau à l'axe de suspension du pendule.

P le poids du pendule, non compris celui de l'essieu.

E le poids de l'essieu.

x la distance à l'axe de suspension du centre de gravité du système, formé du pendule et de l'essieu réunis, autrement dit pendule à essieu.

Le corps de l'essieu ayant une épaisseur moyenne de $0^{m},073$, on peut, sans erreur sensible, supposer son centre de gravité placé au milieu de cette épaisseur ou à 0,0365 du plan du plateau. Mais ce dernier étant à une distance $l = 1^{m},184$, de l'axe de suspension, le centre de gravité de l'essieu était éloigné de l'axe de suspension d'une quantité égale à $1,184 - 0,0365 = 1,4975$. Ce qui donne $l' = 1,4975$.

Substituant les données numériques dans la formule précédente on obtient :

$$x = \frac{566 \times 1,184 + 65 \times 1,4975}{566 + 65} = 1,2163.$$

Ainsi le poids du pendule chargé de l'essieu de campagne était de $566 + 65 = 631$ kil. et son centre de gravité était à une distance de $1^{m},2163$ de l'axe de suspension.

En faisant osciller le pendule à essieu on a trouvé qu'il faisait 46 oscillations par minute.

La longueur du pendule simple synchrone a été calculée au moyen de la formule :

$$L = \frac{3600\,x}{N^2}$$

dans laquelle on représente par :

$x = 0{,}994$ la longueur du pendule simple à secondes sous la latitude d'Anvers, lieu de l'expérience.

N le nombre des oscillations dans une minute $= 46$.

L la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule expérimenté.

En appliquant les valeurs numériques à cette formule, on a trouvé :

$$L = 1^m, 6911.$$

Expériences avec le pendule à essieu de campagne n° 1, pour rechercher les moments d'inertie des roues de 6 de campagne et de siége.

Les modèles des roues de campagne et de siége sont au nombre de 4, savoir :

1° La roue de 6 de campagne
2° La roue de 12 de campagne } dont les essieux ont les mêmes fusées.
3° La roue de 6 de siége
4° La roue de siége de 12, 18 et 24.

Les trois premières espèces de roues pouvant s'emboîter sur un même essieu, la recherche de leurs moments d'inertie a eu lieu avec un pendule à essieu de campagne n° 1.

La roue de campagne de 12 ne diffère de celle de campagne de 6, que par l'épaisseur du cercle de fer qui est de 0,005 plus forte: il suffisait donc, pour obtenir son moment d'inertie, d'ajouter, au moment d'inertie de la roue de campagne de 6, celui d'une bande circulaire de fer, ayant le diamètre de la roue et la largeur de la jante et 5 millimètres d'épaisseur; ce moment est facile à calculer.

On a placé sur le pendule à essieu de campagne n° 1, préparé comme nous venons de le dire, successivement deux roues de 6 de campagne et 2 roues de 6 de siége, et le plateau a continué à être horizontal après leur pose.

Les roues ont été serrées fortement chaque fois contre le corps d'essieu, de manière à ne pouvoir tourner, puis on a mis le pendule en mouvement. On a compté le nombre des oscillations qu'il faisait par minute et on a pris une moyenne sur plusieurs essais.

Les résultats des expériences sont indiqués au tableau suivant.

Le moment d'inertie des deux roues réunies a été calculé au moyen de la formule (24) du mémoire concernant les moments d'inertie des canons :

$$R\,x^2 = L'\,(PD + R\,d) - PLD - Rd^2 \qquad (24)$$

dans laquelle les lettres ont les significations suivantes :

R le poids des deux roues réunies.

g la gravité terrestre.

$\frac{R}{g}x^2$ le moment d'inertie des deux roues montées sur un même essieu relativement à leur axe de rotation.

L la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé de l'essieu seulement.

L' la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule chargé des deux roues.

P le poids du pendule chargé de l'essieu seulement.

D la distance du centre de gravité du pendule, chargé de l'essieu seulement, à l'axe de suspension.

d la distance du centre des roues à l'axe de suspension.

Nommons :

MK^2 le moment d'inertie d'une seule roue relativement à un axe de figure.

Le moment d'inertie des deux roues réunies sera $2\,MK^2$ et l'on aura l'égalité

$$2\,g\,MK^2 = R\,x^2.$$

On en déduit pour le moment d'inertie d'une seule roue relativement à son axe de rotation

$$MK^2 = \frac{R\,x^2}{2\,g} = \frac{R\,x^2}{19.618}.$$

La formule (24) a subi une réduction, parce que, dans l'exécution des expériences, on n'a pu remarquer aucune différence entre les nombres des oscillations par minute du pendule à essieu et de celui à roues. Il en est résulté que les nombres représentés par L et L′ étaient les mêmes.

Remplaçant L′ par L dans l'équation (24) elle devient

$$\mathrm{R}\,x^2 = \mathrm{R}\,d\,(\mathrm{L} - d)\,:$$

d'où

$$x^2 = \mathrm{L}\,d - d^2$$

Cette formule est plus favorable au calcul, parce que le facteur d et le produit d^2 ne changent pas pour toutes les expériences faites avec un même essieu : il n'y a donc que la quantité L qui soit variable.

Tableau contenant tous les éléments fournis par l'expérience pour calculer les moments d'inertie des roues de 6 de campagne et de siége.

DÉSIGNATION des ROUES.	Poids de deux roues, valeur de R.	Diamètre des roues.	Poids du pendule non chargé, valeur de P.	Distance du centre de gravité du pendule non chargé à l'axe de suspension, valeur de D.	Distance du centre des roues, chargées sur le pendule, à l'axe de suspension, valeur de *d*.	Poids moyen d'une roue.	Nombre d'oscillations par minute de pendule.		Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule.		Moment d'inertie des deux roues relativement à leur axe de rotation, valeur de $\frac{R x_2}{g}$	Moment d'inertie d'une roue relativement à son axe de rotation, valeur de $MK^2 = \frac{R x^2}{2 g}$	*OBSERVATIONS.*
							Non chargé.	Chargé des deux roues.	Non chargé, valeur de L.	Chargé des deux roues, valeur de L'.			
Roue de 6 de campagne, moyen en bois.	201,5	1,45	631	1,2163	1,4975	100,75	46	46	1,6911	1,6911	5,9555	2,9777	On n'a pu remarquer aucune différence entre les nombres des oscillations du pendule chargé ou non.
Roue de 6 de siége, moyen en fonte.	307,5	1,520	631	1,2163	1,4975	153,75	46	46	1,6911	1,6911	9,0885	4,54425	

§ 3. PENDULE A ESSIEU DE SIÉGE DE 12, 18 ET 24 POUR LA RECHERCHE DES MOMENTS D'INERTIE DES ROUES DE SIÉGE DE 12, 18 ET 24.

L'essieu de campagne n° 1, ayant été enlevé du plateau, on l'a remplacé par un essieu de siége de 12, 18 et 24, pesant 96 kil. et disposé de la même manière que le premier. On s'est assuré que le plateau du pendule au repos était resté horizontal après le placement de l'essieu.

Le poids du pendule à essieu de siége de 12, 18 et 24 était $566 + 96 = 662$ kilogrammes.

En tenant compte, des diverses épaisseurs du corps de l'essieu, on a trouvé que son centre de gravité était à une distance de $1^m,494$ de l'axe de suspension.

Le centre de gravité du pendule chargé, de l'essieu de siége de 12, 18 et 24, était distant de l'axe de suspension d'une quantité marquée par la formule

$$x = \frac{566 \times 1,184 + 96 \times 1,494}{566 + 96} = 1,229.$$

Le pendule, ayant été mis en mouvement, a fourni un nombre moyen de 46 oscillations par minute : le même nombre qu'avec l'essieu de campagne n° 1.

On aurait sans doute trouvé une différence appréciable dans les deux nombres, si on avait eu des appareils de suspension perfectionnés, et si l'essieu avait été à une plus grande distance de l'axe de suspension.

Les deux roues de siége de 12, 18 et 24 ont été passées successivement sur les fusées de l'essieu, et serrées chaque fois contre le corps d'essieu de manière à ne pouvoir tourner.

La forme conique des fusées, et l'inclinaison de leurs axes, ont été causes que le centre de gravité des roues était un peu plus haut que celui de l'essieu, tout en restant sensiblement dans le même plan passant par l'axe de suspension et par le centre de gravité du pendule.

La distance de la ligne du centre des roues à l'axe de suspension, ayant été mesurée exactement, a été trouvée égale à $1^m,488$.

Le tableau suivant contenant les résultats des expériences et les éléments du calcul des moments d'inertie des roues de siége de 12, 18 et 24, en employant les mêmes formules que pour les roues de 6 de campagne et de siége.

Tableau contenant tous les éléments fournis par l'expérience pour calculer le moment d'inertie des roues de 12, 18 et 24 de siége.

DÉSIGNATION des ROUES.	Poids des deux roues, valeur de R.	Poids d'une roue.	Diamètre des roues.	Poids du pendule non chargé, valeur de P.	Distance du centre de gravité du pendule non chargé à l'axe de suspension, valeur de D.	Distance du centre des roues chargées sur le pendule à l'axe de suspension, valeur de *d*.	Nombre des oscillations par minute, du pendule.		Longueur du pendule simple synchrone avec le pendule.		Moment d'inertie des deux roues relativement à leur axe de suspension.	Moment d'inertie d'une roue relativement à son axe de rotation.	*OBSERVATIONS.*
							Non chargé.	Chargé des deux roues.	Non chargé, valeur de L.	Chargé des deux roues, valeur de L′.			
Roue de siége de 12, 18 et 24 moyen en fonte.	508,3	254,15	1,52	662	1,229	1,488	46	46	1,6911	1,6911	15,6606	7,8303	On n'a pu remarquer aucune différence entre le nombre des oscillations du pendule chargé ou non.

IV.—*Mémoire relatif à différents sujets de Mathématiques élémentaires,*

PAR

J.-N. NOËL,

PROFESSEUR ÉMÉRITE DE L'UNIVERSITÉ.

Ce Mémoire a pour but de démontrer, avec plus de clarté et de simplicité, certains principes élémentaires de quelques théories reproduites ci-dessous, résumant en partie les deux Mémoires: *Méthode infinitésimale en géométrie* et *Notes sur l'analyse infinitésimale.* — Liége, H. DESSAIN, 1859 et 1861.

Éléments du calcul infinitésimal.

1. — Le but du calcul infinitésimal est de trouver des nombres *finis* à l'aide de nombres auxiliaires infiniment grands et infiniment petits.

2. — Tout nombre est *fini*, si grand ou si petit qu'il soit, lorsqu'on peut l'écrire avec un nombre *limité* de chiffres, ou bien lorsque ne pouvant être écrit en chiffres, il est compris entre deux nombres finis donnés.

3. — *Les nombres infinis existent nécessairement.* On démontre, en effet, que si la racine r ième d'un nombre entier donné n'est pas elle-même un nombre entier, elle est une fraction irréductible n sur d, finie comme étant comprise entre deux nombres entiers immédiatement consécutifs; mais dont les deux termes

n et d ont un nombre *illimité* de chiffres chacun et *sont deux nombres infinis inégaux*, n'ayant chacun qu'une seule valeur toujours inconnue; bien qu'on puisse en calculer les six ou sept premiers chiffres.

De plus, les deux termes n et d de la fraction racine r ième ont évidemment chacun une valeur infinie différente pour tout autre nombre entier donné qui n'est pas une puissance r ième parfaite. Et comme cela est vrai pour les racines carrée, cubique, quatrième, etc., on voit que non-seulement *il existe une infinité de nombres entiers infinis inégaux;* mais de plus *il existe une infinité de fractions à termes infinis, ceux-ci n'ayant point de commun diviseur.* De sorte que chaque fraction, racine r ième, a une valeur *finie*, toujours inconnue et indéterminable, mais qu'on peut néanmoins calculer souvent avec une approximation suffisante.

4. — On peut toujours concevoir divisée en un nombre infini n de parties égales l'unité quelconque : *mètre, litre, kilogramme, jour et degré* d'angle ou d'arc circulaire. Or chaque unité renfermant le nombre infini n de parties égales, il est clair que $2, 3, 4, \ldots$ unités en contiendront $2n$, $3n$, $4n$, etc. D'où l'on voit qu'un nombre infini peut être un multiple donné et par suite une fraction connue d'un autre nombre infini.

En général, on voit que *le produit d'un nombre infini par un nombre quelconque fini est lui-même un nombre infini.* Donc *le quotient, le rapport, de deux nombres infinis est toujours un nombre fini, mais inconnu et inexprimable comme ses deux termes.*

5. — Soit a un arc circulaire tracé et par conséquent *fini.* Supposons-le divisé en un nombre infini n de parties égales *à* x; je dis que chaque partie x est *infiniment petite,* c'est-à-dire moindre que tout arc donné ou simplement imaginé, si petit que soit ce dernier.

Car le diviseur n étant infini, il est plus grand toujours que le diviseur fini d, si grand que soit celui-ci; le quotient x de a par n sera donc toujours moindre que le quotient de a par d, si petit que soit ce dernier quotient. Donc x est infiniment petit.

6. — De même, le quotient de l'unité quelconque divisée par le nombre infini n est infiniment petit, aussi bien que le quotient x

du nombre fini a par le nombre n infini. Ayant donc $x = a : n$, il vient $nx = a$. Ainsi *le produit de deux facteurs, l'un infini et l'autre infiniment petit, est toujours un nombre fini.* On a aussi $a : x = n$. Donc *le quotient d'un nombre fini par un nombre infiniment petit est un nombre infiniment grand.*

7. — Le quotient de l'unité divisée par le nombre infini n est le nombre x infiniment petit (n° 5), d'où $x = 1$ sur n. Multipliant de part et d'autre par le nombre fini a quelconque, il vient $ax = a : n$. *Le produit du nombre infiniment petit* x *par le nombre fini* a *quelconque est donc infiniment petit lui-même* (n° 6). De là résulte que *le rapport ou le quotient de deux nombres infiniment petits est toujours un nombre fini, mais inconnu et inexprimable comme ses deux termes.*

8. — Maintenant, si chaque unité est divisée en un nombre infini n de parties égales infiniment petites, il y a une infinité de fractions, à termes infinis, comprises entre 2 et 3, par exemple. Toutes ont le même dénominateur n infini, tandis que leurs numérateurs infinis sont : $2n+1$, $2n+2$, $2n+3$,... $3n-1$.

Or, beaucoup de ces fractions se simplifient et prennent des valeurs finies exprimables, parce que les deux termes ont un facteur infini commun. Par exemple, l'une de ces fractions se réduit à $\frac{29}{12}$; il faut donc que ses deux termes aient un facteur infini commun, contenu 29 fois et 12 fois au numérateur et au dénominateur.

9. — Il existe une infinité de nombres infiniment petits différents, aussi bien qu'une infinité de nombres infinis (n° 5). Ces deux genres de nombres, *irrationnels* ou *inexprimables* en chiffres, sont dits infinis et infiniment petits du *premier ordre*. Et puisque ce sont des nombres inconnus, désignés chacun par une lettre, on peut toujours les soumettre à toutes les opérations du calcul littéral. Or, les produits de 2, 3, 4,... nombres infinis ou infiniment petits sont dits infinis ou infiniment petits du *second ordre*, du *troisième*, du *quatrième*, etc.

10. — On sait que la racine r ième de chaque nombre m entier donné, qui n'est pas une puissance r ième parfaite, est une fraction irréductible finie n sur d dont les deux termes sont deux nombres entiers infinis inégaux. Et comme chaque fois on a $m = n^r$ sur d^r, il en résulte :

$$n^r = d^r \times m \text{ et } \frac{1}{d^r} = \frac{1}{n^r} \times m.$$

On voit que deux infinis ou infiniment petits du r ième ordre peuvent être l'un de l'autre un multiple donné et par suite une fraction connue.

Cela étant vrai pour $r = 2, 3, 4$, etc., on en conclut que non-seulement *il existe une infinité d'infinis ou d'infiniment petits du second ordre, du troisième, du quatrième, etc.;* mais de plus, *le rapport de deux infinis ou de deux infiniment petits du même ordre est toujours un nombre fini inconnu et indéterminable comme ses deux termes.*

11. — Il est évident que la somme de plusieurs nombres infinis ou infiniment petits est un nombre infini ou infiniment petit elle-même. Mais *s'il y a une infinité de nombres infinis ou infiniment petits, la somme est un nombre infini du second ordre ou un nombre fini inconnu.*

1° Soit n le nombre infini de termes inégaux et infinis de la somme S; soit n' le plus petit et n'' le plus grand de tous ces termes infinis. Il est clair que $S > nn'$ et $S < nn''$; d'où l'on voit que la somme S est comprise entre les deux infinis du second ordre nn' et nn''. Donc elle est un nombre infini du second ordre elle-même.

2° Soit S' la somme du nombre infini n de termes inégaux et infiniment petits; soit m le plus petit et p le plus grand de ces termes infiniment petits. On a donc $S' > mn$ et $S' < pn$. Or, le produit d'un nombre infiniment petit par un nombre infini est un nombre fini (n° 6); donc la somme S', comprise entre les deux nombres finis mn et pn, est elle-même un nombre fini, toujours inconnu comme ses deux facteurs.

12. — Un nombre infini n n'est ni plus ni moins infini lorsqu'on lui ajoute ou qu'on en retranche un nombre fini, 4 par exemple; cette addition ou cette soustraction est donc inutile, et l'on doit la négliger absolument comme si 4 était rigoureusement nul à l'égard du nombre infini n. De sorte que n est la même chose que $n \pm 4$; et ainsi, 1° *4 est un zéro relatif au nombre* n *infini;* 2° *deux nombres infiniment grands sont égaux entre eux lorsqu'ils ne diffèrent que d'un nombre fini, donné ou inconnu.*

Il suit de là que si deux nombres infinis ou infiniment petits sont inégaux entre eux, leur différence, toujours inconnue, est un nombre infini ou infiniment petit.

13. — Il résulte des définitions que: 1° Un infini d'un ordre quelconque contient une infinité de fois l'infini de l'ordre immédiatement inférieur; 2° le nombre infiniment petit d'un certain ordre contient une infinité de fois l'infiniment petit de l'ordre immédiatement supérieur. — Soit en effet le nombre infiniment petit $x=1$ sur ∞. Il est clair, par exemple, que $\infty^3 : \infty^2 = \infty$ et $x^4 : x^5 = 1 : x = \infty$.

14.—Si, en cherchant un nombre fini A, on est conduit à l'égalité $A = B \pm x$, B étant un nombre fini donné, et x un nombre auxiliaire infiniment petit, toujours inconnu; il est clair que *x doit disparaître de cette égalité*, d'abord comme auxiliaire et ensuite parce que A ne serait pas un nombre fini et serait toujours inconnu, si l'infiniment petit x devait rester dans l'expression $B \pm x$ de A. D'ailleurs, x étant moindre que tout nombre donné, si petit que soit ce dernier nombre, on ne saurait en tenir compte pour augmenter ou diminuer le nombre B fini. On doit donc forcément négliger x et écrire $A = B$.

15. — En général, *tout nombre ne peut augmenter ni diminuer celui qui le contient un nombre infini de fois, et doit se négliger à l'égard de celui-ci : c'est un zéro relatif à ce dernier.*

Car le nombre de fois n'est ni plus ni moins infini lorsqu'on lui ajoute ou qu'on en retranche une fois le premier nombre; cette addition ou cette soustraction est donc inutile et doit se négliger absolument comme si ce nombre était rigoureusement nul. D'ailleurs, ce nombre est *variable* et de plus *infiniment petit* relativement au second.

16. — De là et du (n° 13) résulte le *Principe infinitésimal* que voici : 1° Tout nombre fini est nul à l'égard d'un nombre infini, et chaque infini d'un certain ordre est nul relativement à l'infini de l'ordre immédiatement supérieur ; 2° tout nombre infiniment petit est nul relativement à un nombre fini, et chaque infiniment petit d'un certain ordre est nul à l'égard de l'infiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur.

17. — Ainsi lorsque les grandeurs infinitésimales sont employées comme auxiliaires pour calculer des nombres finis, et avoir des *formules générales*, on abrège singulièrement les calculs et les raisonnements, sans altérer aucunement la rigoureuse exactitude du résultat cherché, en appliquant le principe infinitésimal ci-dessus ; vu qu'alors on supprime d'abord tous les termes fournissant ceux

qui doivent disparaître à la fin pour avoir le nombre fini cherché. Nous en aurons plus bas différents exemples.

REMARQUE. — La théorie précédente du *Calcul infinitésimal*, étant très-claire et très-simple, devra figurer dans les éléments. Elle y est nécessaire à la discussion des problèmes généraux d'algèbre et de géométrie numérique ; nécessaire encore à la définition descriptive de toute *courbe continue finie* ou *limitée*, et aussi pour faciliter les déductions logiques du calcul dans les rapports et les proportions entre quantités continues, ainsi que pour établir clairement et simplement les propositions de mesurage dans le cercle et les corps ronds.

Propriétés infinitésimales du cercle.

Observons d'abord que la définition descriptive de chaque courbe *continue finie* conduit immédiatement aux propriétés infinitésimales du cercle, ainsi que nous l'avons établi ailleurs. Mais elles se déduisent plus exactement du *Principe des deux variables auxiliaires finales*, dont la nouvelle démonstration ci-dessous est la plus claire et la plus complète. Voici ce principe :

18. — Considérons l'équation toujours exacte, savoir :

$$a+x=b+y \text{ ou bien } a-b=y-x,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités *constantes*, tandis que x et y sont deux *variables* pouvant diminuer ensemble indéfiniment sans que l'égalité proposée cesse d'exister. *Je dis que les deux variables sont égales entre elles et qu'il en est de même des deux constantes.*

D'abord la différence $y-x$ est constante avec $a-b$; or cela ne peut arriver que quand cette différence est nulle.

Soit en effet posé $y=vx$; on a donc alors

$$y-x=vx-x \text{ et } y-x=x\,(v-1).$$

Soit d'ailleurs n un nombre donné, exprimable ou non, mais plus grand que l'unité. Puisque x et y peuvent diminuer ensemble sans que l'égalité proposée soit détruite, supposons que le facteur x diminue et devienne son quotient par n ; il faudra donc, pour que la différence $y-x$ demeure constante, que l'autre facteur $v-1$ devienne son produit par n. Or, cela est impossible ; car les variations de x et de y n'ont évidemment aucune influence sur le terme -1 du second facteur $v-1$. La différence $y-x$ n'étant donc constante que quand elle est nulle, il en résulte $x=y$ et $a=b$.

Si l'égalité proposée était $a - x = b - y$, on verrait de même que $x = y$ et $a = b$. Le *principe des deux variables finales* est donc ainsi démontré clairement et complètement.

19. — Maintenant, soient C et C′ les circonférences des cercles dont R et R′ sont les rayons ; P et P′ les périmètres des deux polygones réguliers inscrits du même nombre infini n de côtés infiniment petits et invisibles. Ces deux polygones réguliers sont donc semblables et l'on a $P : P' = R : R'$. Soit m le rapport constant de R à R′ ; il en résulte $R = mR'$ et $P = mP'$.

Les périmètres P et P′ ayant une infinité de points communs avec les circonférences C et C′, il est clair que s'ils ne coïncident pas avec celles-ci, ils ne seront surpassés par elles que des longueurs fort petites x et y; d'où $P = C - x$ et $P' = C' - y$. L'égalité $P = mP'$ devient donc

$$C - x = mC' - my \text{ ou } C = mC' + x - my.$$

Cette égalité est vraie quel que soit le nombre n infini. Or n devenant de deux en deux fois plus grand, les périmètres P et P′ ont de deux en deux fois plus de points communs avec les circonférences C et C′ ; ils approchent donc de plus en plus de coïncider avec celles-ci, et les différences x et y diminuent de plus en plus. Et comme alors l'égalité précédente ne cesse pas d'exister, bien que les quantités x et my diminuent ensemble, tandis que les longueurs C et mC' demeurent constantes, il suit du principe des deux variables finales qu'on a $x - my = 0$ et $C = mC'$. Déjà $R = mR'$ ou $2R = 2mR'$. Donc

$$C : C' = R : R' = 2R : 2R' \text{ et } C : 2R = C' : 2R'.$$

Ainsi, 1° *Les circonférences de deux cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres ;* 2° *Le rapport de toute circonférence à son diamètre est un nombre constant, c'est-à-dire le même que le rapport d'une autre circonférence à son diamètre.*

20. — Le rapport constant de la circonférence C à son diamètre 2R est toujours désigné par π. D'ailleurs, C et 2R n'ont pas d'autre commun diviseur qu'une droite infiniment petite ; le rapport π est donc une fraction irréductible dont les deux termes sont infinis. Or, comme 6R est le périmètre de l'hexagone régulier inscrit et 8R le périmètre du carré circonscrit, il est clair que $C > 6R$ et $C < 8R$; d'où $\pi > 3$ et $\pi < 4$. Ainsi π est un nombre inexprimable *fini*, compris entre 3 et 4 ; mais plus près de 3 que de 4, vu que 6R a 6 points communs avec C, tandis que 8R n'en a

que 4. Le nombre π sera toujours inconnu ; mais on a différents procédés élémentaires pour calculer des valeurs approchées du nombre π. La plus usitée a sept décimales exactes, savoir :

$$\pi = 3{,}1415926 \text{ ; d'où } C = 2R \times \pi.$$

Ainsi *pour exprimer en mètres la longueur C de la circonférence, on mesure son rayon R avec le mètre, et l'on multiplie le double du nombre résultant par la valeur approchée de* π. — Si donc $R = 20$ mètres, on aura $C = 125^{m},664$ millimètres.

21. — Maintenant, puisque l'égalité $P = mP'$ est devenue $C = mC'$, on voit que s'il y a les erreurs x et my à supposer que les périmètres P et P′ coïncident avec les circonférences C et C′, ces erreurs se *compensent* ou *se détruisent toujours ;* car toujours on doit avoir $x - my = 0$. Et puisque cette condition est satisfaite par $x = 0$ et $y = 0$, on voit que : *Les deux périmètres coïncident avec les deux circonférences, tandis que chaque arc infiniment petit coïncide avec sa corde.*

22. — De là résulte nécessairement que, *pour les rapports et le mesurage, on peut toujours, sans aucune erreur finale, considérer chaque cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits et invisibles, dans lequel l'apothème et le rayon sont égaux entre eux.* C'est ainsi que le cercle sera désormais considéré.

23. — *Tous les cercles sont semblables et ont la même forme ;* comme polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés infiniment petits et invisibles. De sorte que l'un de ces cercles est exactement en petit ce que les autres sont en grand, et les représente, tant pour l'étude que pour les opérations graphiques et numériques.

24. — *Les circonférences sont des courbes semblables ;* car ce sont deux lignes brisées *régulières,* ayant le même nombre infini de côtés homologues proportionnels comprenant des angles homologues égaux. *Les deux courbes dessinent des formes identiques ;* vu que l'une est exactement *en petit* ce que l'autre est *en grand.*

25. — Soient R et R′ les rayons des arcs A et A′, ceux-ci mesurant des angles égaux aux centres. Concevons les deux arcs A et A′ divisés en un même nombre infini n d'arcs partiels égaux infiniment petits, se confondant avec leurs cordes égales (n° 21). Ces cordes sont les bases des deux systèmes de triangles isocèles égaux, infiniment petits et invisibles, qui composent les deux secteurs circulaires S et S′. D'ailleurs, *ces deux secteurs sont*

semblables; car ils sont composés de triangles isocèles semblables chacun à chacun et semblablement disposés. D'où il suit que *les deux arcs* A *et* A' *sont semblables ;* comme étant deux lignes brisées régulières ayant les angles homologues égaux et les côtés homologues proportionnels, et l'on a $A : A' = R : R'$. — Ici encore les contours des deux secteurs dessinent des formes identiques.

26. — Soit A l'aire du cercle dont C est la circonférence et R le rayon; soit B l'aire et P le périmètre du polygone régulier circonscrit d'un nombre infini n de côtés égaux, infiniment petits et invisibles : R est donc l'apothème de ce polygone, et l'on a

$$B = \frac{1}{2} PR.$$

Le périmètre P a une infinité de points communs avec la circonférence C. Si donc P ne coïncide pas avec C, ni B avec A, les différences y et x seront fort petites, d'où l'on aura $P = C + y$ et $B = A + x$. Par ces valeurs l'égalité $B = \frac{1}{2} PR$ devient

$$A + x = \frac{1}{2} CR + \frac{1}{2} Ry \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2} CR + \frac{1}{2} Ry - x.$$

Cette égalité est vraie quel que soit le nombre infini n de côtés du polygone régulier circonscrit. Or n devenant de deux en deux fois plus grand, P a de deux en deux fois plus de points communs avec C; il approche donc de plus en plus de coïncider avec C, ainsi que B avec A, et les différences y et x diminuent de plus en plus.

Les quantités A et $\frac{1}{2} CR$ restent donc constantes pendant que les variables y, x et la différence $\frac{1}{2} Ry - x$ diminuent de plus en plus ensemble. Et puisque l'égalité proposée ne cesse pas d'exister, il faut que, d'après le principe des deux variables finales (n° 18), on ait

$$\frac{1}{2} Ry - x = 0, \text{ et par suite } A = \frac{1}{2} CR.$$

Ainsi l'unité u rectiligne et l'unité superficielle s, carré fait sur u, étant sous-entendues comme conséquents des rapports numériques, on voit que : *L'aire du cercle a pour mesure le demi-produit des mesures de la circonférence et du rayon de ce cercle.*

D'ailleurs, la mesure de C est $2\pi R$; donc $A = \pi R^2$. *L'aire du*

cercle a donc pour mesure le produit du rapport π *par le carré numérique du rayon* R. Faisant reparaître les unités s et u sous-entendues, la véritable expression de l'aire A est

$$A = s \times \pi (R : u)^2.$$

Si donc R = 10 mètres, on aura A = 314,16 mètres carrés, à moins d'un demi-décimètre carré en plus.

27. — Observons encore ici que l'égalité $B = \frac{1}{2} PR$ est devenue $A = \frac{1}{2} CR$, avec la condition $\frac{1}{2} Ry - x = 0$. Cette condition fait voir que s'il y a des erreurs à supposer que le périmètre P coïncide avec la circonférence C, et l'aire B avec l'aire A, ces deux erreurs se compensent ou se détruisent toujours. D'ailleurs, la condition ci-dessus est satisfaite par $y = 0$ et $x = 0$; ce qui fait coïncider le périmètre circonscrit avec la circonférence, et le polygone régulier avec le cercle. Cela conduit de nouveau à la proposition très-importante que *le cercle n'est réellement qu'un polygone régulier, etc.* (n° 22) ; proposition qui donne immédiatement l'expression de l'aire du cercle.

Mais puisque le périmètre P du polygone régulier circonscrit, d'une infinité de côtés infiniment petits invisibles, coïncide avec la circonférence C, il en résulte qu'on peut toujours, sans aucune erreur finale, admettre que : *chaque arc infiniment petit coïncide avec le côté tangent à son milieu*, ainsi qu'avec sa corde (n° 21).

28. — Le rayon mené au point de contact, milieu commun au côté, à l'arc et à sa corde, lesquels coïncident, leur est perpendiculaire. Ainsi, 1° *Tout arc infiniment petit est perpendiculaire au rayon mené à l'une de ses extrémités ;* 2° La demi-corde et le demi-côté, c'est-à-dire *le sinus et la tangente du demi-arc* x *infiniment petit, coïncident avec cet arc, de rayon* R *donné*. Il n'y a donc aucune erreur finale à poser, en trigonométrie : *sinus* $x = x$, *tangente* $x = x$ et *cosinus* $x = R$.

29. — Soit S l'aire de tout secteur circulaire, A la mesure de son arc et R celle de son rayon. L'arc A est une ligne brisée régulière, ayant une infinité de côtés infiniment petits, ces côtés sont les bases du même nombre infini de triangles isocèles égaux, infiniment petits et invisibles, dont R est la hauteur de chacun. Or chaque triangle ayant pour mesure le demi-produit de sa base par R, on voit que $S = \frac{1}{2} AR$.

Soit v le nombre de *degrés* de l'arc A : il est clair qu'on a

$$180 : v = \pi R : A ; \text{ d'où } A = \pi R (v : 180).$$

Si donc le nombre v est connu, aussi bien que le nombre R, il sera facile de calculer la longueur de l'arc A en unités rectilignes, en mètres.

Substituant dans l'expression de S et faisant reparaître les unités s et u sous entendues, il vient, pour calculer l'aire S du secteur circulaire :

$$S = s \times \pi (R : u)^2 (v : 360).$$

Remarques. — La méthode des deux variables finales donne à la fois l'*induction* et la *démonstration directe*, rigoureusement exacte.

Voilà pourquoi nous l'employons, de préférence à la définition descriptive de la courbe, pour établir les *propriétés infinitésimales* du cercle. Ces propriétés sont nécessaires pour simplifier le plus possible, pour élucider et généraliser la théorie du mesurage dans le cercle et les corps ronds.

Mais s'il fallait seulement établir la *constance* du rapport π, on dirait : il est évident que la circonférence C se décrit et se détermine avec son rayon R absolument comme la circonférence C′ avec son rayon R′, c'est-à-dire que C est exprimée en R absolument comme C′ en R′. Si donc $C' = m R'$, on aura aussi nécessairement $C = m R$; d'où il vient

$$C : 2R = C' : 2R' = \pi.$$

Dans cette démonstration les infiniment petits sont *déguisés* et non *évités*.

Enfin, le calcul de la valeur approchée en décimales du rapport π fait voir que *cette valeur approchée est la même pour deux circonférences quelconques*.

Mesurage du volume de toute pyramide.

30. — Le mesurage de tout prisme conduit directement, par l'emploi de deux nombres auxiliaires variables et par des calculs algébriques fort élémentaires, au mesurage d'une pyramide quelconque. Mais il faut d'abord connaître l'expression de la somme Sn^2 des carrés des n premiers nombres entiers.

Or, si $\frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$ exprime la somme des n premiers termes d'une série et qu'on en retranche la somme des $n - 1$

premiers, il reste nécessairement le n ième terme. Donc puisque ce reste est ici n^2, on voit que

$$Sn^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\,;$$

d'où $$Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{3}n^3 + < n^2.$$

Soit k un nombre constant moindre que l'unité : il est clair que $k < 1$ donne $2kn < 2n$ et $kn^2 < n^2$. Ainsi l'on aura toujours

$$Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + kn^2,$$

le dernier terme de cette formule étant la *limite supérieure* de la somme $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Soit Sn la somme des n premiers nombres entiers et Sn^3 la somme de leurs cubes. On trouve pareillement

$$Sn = \frac{1}{2}\, n\,(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + kn,$$

$$Sn^3 = \frac{1}{4}n^2\,(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + kn^3.$$

31. — Cela posé, les unités u, s et v linéaire, superficielle et de volume étant sous-entendues comme conséquents des rapports numériques, soient P, b et h les nombres mesures respectives de la pyramide proposée, de sa base convexe ou concave et de sa hauteur. Concevons la hauteur h divisée en un grand nombre n de parties égales à x par des plans parallèles entre eux et à la base b : on a $h = nx$, et ces plans divisent P en n tranches toutes d'égale hauteur x numérique. Soit T la m ième de ces tranches à partir du sommet de la pyramide ; soient a et c les mesures des bases parallèles de T, lesquelles bases sont évidemment aux distances numériques mx et $(m-1)x$ du même sommet. Ainsi l'on a

$$b : a = h^2 : m^2x^2 \text{ et } b : c = h^2 : (m-1)^2x^2.$$

Posant $b = rh^2$, les deux proportions précédentes donnent

$$a = r\,m^2x^2 \text{ et } c = r\,(m-1)^2x^2.$$

La m ième tranche T est plus petite que le prisme $a\,x$ ou $r\,m^2x^3$ dont elle fait partie ; mais elle est plus grande que le prisme $c\,x$ ou $r\,(m-1)^2x^3$ entièrement intérieur. Donc T n'est surpassée par

le premier prisme que d'une quantité moindre que la différence des deux prismes. Et comme $m^2-(m-1)^2$ est moindre que $2m$ et à plus forte raison moindre que $2n$, puisque n est la plus grande valeur de m, on voit que

$$T=rx^3(m^2-2kn).$$

Posant successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots n$, on aura les valeurs successives des n tranches de la pyramide; la somme de ces n valeurs exprime donc la mesure P de cette pyramide. On a donc

$$P=rx^3(Sn^2-2kn^2).$$

Substituant à Sn^2 sa valeur $\frac{1}{3}n^3+kn^2$ et réduisant, on trouve

$$P=\frac{1}{3}r(nx)^3-kr(nx)^2x.$$

D'ailleurs, $nx=h$ et $b=rh^2$: il vient donc

$$P=\frac{1}{3}bh-kbx.$$

Cette égalité est vraie quel que soit le nombre entier n. Or n devenant de deux en deux fois plus grand, la n ième partie x de h devient au contraire de deux en deux fois plus petite, tandis que les nombres P et $\frac{1}{3}bh$ restent constants. Si donc le terme $-kbx$ restait dans l'égalité précédente, toujours exacte, le nombre constant P serait toujours égal à un nombre variable; chose évidemment absurde. Donc le terme $-kbx$ doit disparaître de l'expression de P, non parce qu'il est nul (il ne le sera jamais), mais uniquement parce qu'il est variable avec l'auxiliaire x, et l'on a exactement

$$P=\frac{1}{3}bh; \text{ d'où } P=v\times\frac{1}{3}(b:s)(h:u).$$

Ainsi *toute pyramide a pour mesure le tiers du produit des mesures de sa base et de sa hauteur.*

Corollaire. I. — Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

II. — Deux pyramides quelconques sont équivalentes; 1° Lorsqu'elles sont *symétriques* entre elles, et en général lorsqu'elles ont bases ou égales ou équivalentes et hauteurs égales; 2° lorsque les mesures des bases sont en raison inverse des mesures des hauteurs.

III. Le rapport de deux pyramides quelconques est le même que celui des hauteurs quand les deux bases sont équivalentes ; il est aussi le même que celui des bases lorsque les hauteurs sont égales.

IV. — On voit de plus que : *si une égalité exacte renferme deux nombres constants et un seul variable, pouvant devenir infiniment petit sans que l'égalité soit détruite, les deux termes constants sont égaux entre eux.*

32. — La théorie précédente du mesurage de toute pyramide est déjà très-claire et fort simple ; mais elle devient plus simple encore, sans qu'elle cesse d'être rigoureusement exacte, lorsque les deux nombres variables auxiliaires n et x deviennent l'un n infiniment grand et par conséquent l'autre x infiniment petit, vu que $nx=h$. Alors le *principe infinitésimal* (n° 15) faisant connaître les termes que l'on doit supprimer d'abord parce qu'ils n'ont aucune influence sur la valeur du nombre fini P cherché, abrège singulièrement les raisonnements et les calculs pour trouver ce nombre.

En effet, d'après ce principe, on doit supprimer d'abord, dans les premières expressions de Sn, Sn^2 et Sn^3, les termes $+1$, comme ne pouvant augmenter le nombre infini n ; ce qui donne

$$Sn=\frac{1}{2}n^2,\ Sn^2=\frac{1}{3}n^3 \text{ et } Sn^3=\frac{1}{4}n^4.$$

De plus, supprimer ensuite le terme $-2khx^2$, infiniment petit du second ordre dans l'expression de la m ième tranche T proposée ; vu que ce terme devenant infiniment petit du premier ordre à la fin des calculs, est nul relativement au nombre fini P. Ainsi on a

$$Sn^2=\frac{1}{3}n^3 \text{ et } T=rm^2x^3.\ \text{De là donc}$$

$$P=rx^3\,Sn^2=\frac{1}{3}r(nx)^3=\frac{1}{3}rh^3 \text{ et } P=\frac{1}{3}bh.$$

Ce procédé est très-abréviatif, on le voit. Or, bien que fondé sur le calcul et le principe infinitésimal, il n'en est pas moins le plus élémentaire de tous : *il consiste à regarder l'aire plane ou le volume qu'on veut mesurer comme étant la somme d'un nombre infini* n *de tranches parallèles, toutes d'égale hauteur* x *infiniment petite, et à traiter la* m *ième de ces tranches comme un parallélogramme, un prisme ou un cylindre.*

Chaque fois, en effet, elle n'en diffère que d'un infiniment petit du second ordre, lequel disparaît de l'expression du nombre fini

cherché, en vertu de la *méthode d'une seule variable finale* ci-dessus (n° 31) : telle est la méthode infinitésimale, *par décomposition en tranches parallèles*.

33. — Voyons comment l'*axiôme de mesurage* fait passer directement de l'expression du volume du prisme à l'expression du volume de la pyramide.

Soient P et N deux pyramides quelconques : chacune est déterminée complètement dès que sa base et une arête latérale sont données de grandeur et de position ; car alors les faces latérales sont aussi déterminées chacune, et la pyramide est construite. Or, si l'on fait glisser l'arête latérale de P, parallèlement à elle-même, sur le contour de la base, il en résulte le prisme P′ de même base et de même hauteur. Pareillement, l'arrête latérale de la pyramide N glissant parallèlement à elle-même, sur le contour de la base, il en résulte le prisme N′ de même hauteur et de même base.

On voit que le prisme N′ se construit et se détermine avec la pyramide N absolument comme le prisme P′ avec la pyramide P ; c'est-à-dire que N′ est exprimé en N absolument comme P′ en P. Si donc $P' = P \times m$, on aura aussi $N' = N \times m$. Reste à calculer le nombre m.

Or, le centre d'un cube quelconque C est le sommet commun à six pyramides droites égales entre elles et à N *par coïncidence*, comme ayant pour bases respectives les six carrés égaux, faces du cube, et chacune pour hauteur la moitié du côté de ce cube. Donc $6N = C$ et $3N = \frac{1}{2}C$. D'ailleurs, le demi-cube est un prisme équivalant au prisme N′, comme ayant même base et même hauteur ; d'où l'on a $N' = 3N = N \times 3$. Déjà $N' = N \times m$; donc $m = 3$, $P' = 3P$ et $P = \frac{1}{3}P'$. La pyramide P étant donc le tiers du prisme P′ de même base b et de même hauteur h, on a $P = \frac{1}{3}bh$, comme plus haut (n° 31).

34. — On connaît différents procédés pour trouver l'expression exacte du volume de toute pyramide. Celui que nous venons de développer, étant fondé sur *l'axiôme de mesurage*, est très-simple et devrait peut-être figurer seul dans les éléments, si l'analyse infinitésimale n'était pas nécessaire pour établir clairement

et le plus simplement les propositions de mesurage dans le cercle et les corps ronds.

Pour le mesurage de toute pyramide, on doit préférer la méthode infinitésimale par décomposition en tranches parallèles infiniment minces (n° 32), parce que cette méthode, très-abréviative, s'applique à différents autres mesurages importants : elle supplée, même avec avantage parfois, au calcul intégral pour la détermination rigoureuse du nombre fini cherché.

C'est ainsi que dans les éléments de géométrie, on trouve directement et le plus simplement possible les expressions exactes de plusieurs volumes de révolution et de leurs surfaces, tels que la *tranche* et le *segment* sphériques ; différents genres d'*anneaux* autour d'axes extérieurs dans le même plan, comme ceux engendrés par les révolutions de tout *triangle isocèle*, de tout *secteur circulaire*, de toute *rosace ;* et en particulier l'*anneau rond* et celui de la *lunule circulaire* autour de la corde commune à ses deux côtés ; etc.

De même, en géométrie analytique, on trouve et l'on abrège, comme pour le mesurage de toute pyramide ; les expressions exactes d'aires planes terminées par des lignes courbes ou mixtes, ainsi que les volumes de segments limités par les cinq surfaces du second ordre ; la détermination rigoureuse du volume limité par la base et par la surface courbe, soit de la voûte en plein cintre, soit de la voûte en arcs de cloître, surmontée ou surbaissée, etc.

55. — Il existe deux méthodes des *variables auxiliaires*, suivant que l'équation finale toujours exacte, renferme deux termes constants et un seul terme variable ou bien deux. Ces méthodes sont grandement abrégées, sans cesser d'être rigoureusement exactes, la première au moyen de la méthode infinitésimale par décomposition en tranches parallèles infiniment minces (n° 32), et la seconde à l'aide de la méthode infinitésimale par coïncidence à l'infini (n° 21). Or, de ces deux méthodes infinitésimales la seconde est la plus abréviative : elle fait passer du connu à l'inconnu immédiatement ; c'est-à-dire par la voie la plus claire, la plus simple et la plus complètement exacte, tant pour les propriétés infinitésimales du cercle, que pour différents mesurages dans les corps ronds et de révolution.

Il en résulte, par exemple, que tout *cylindre* droit ou oblique

se confond, pour le mesurage, avec le prisme d'une infinité de faces planes latérales, infiniment étroites et invisibles. — De même, tout *cône* droit ou oblique n'est en réalité qu'une pyramide d'une infinité de faces planes latérales invisibles. — Mais dans la géométrie élémentaire, on ne peut mesurer que les cylindres et les cônes circulaires; et encore faut-il qu'ils soient droits l'un et l'autre pour les surfaces latérales.

36. — *Considérons le cône circulaire droit et cherchons en mètres carrés l'expression de sa surface latérale* L.

Soient a et r les longueurs en mètres du côté du cône et du rayon de sa base.

La circonférence, dont $2\pi r$ exprime la longueur en mètres, est une ligne brisée régulière d'un nombre infini n de côtés égaux à x et infiniment petits; donc la surface latérale L est la somme du nombre infini n de triangles isocèles égaux à T, infiniment petits, plans et invisibles, ayant tous pour hauteur le côté numérique a du cône. Or, $T = x \times \frac{1}{2} a$; donc

$$L = nx \times \frac{1}{2} a = 2\pi r \times \frac{1}{2} a \text{ et } L = \pi r \times a.$$

Ainsi *la surface latérale de tout cône circulaire droit a pour mesure le produit des mesures du côté du cône et de la demi-circonférence de sa base.*

Corollaires. — La surface latérale de tout cône circulaire droit peut donc se *développer* sur un plan et y former un secteur circulaire dont $2\pi r$ est l'arc et a le rayon.

Soit v le nombre de degrés de l'arc $2\pi r$ du secteur, et par suite de son angle au centre. Comme 180 est le nombre de degrés de la demi-circonférence πa, on voit que

$$\pi a : 2\pi r = 180 : v; \text{ d'où } v = \frac{r}{a} \times 360.$$

Et puisque $a > r$, on aura toujours $v < 360°$. Or, l'angle v du secteur est la somme du nombre infini n des angles plans égaux, infiniment petits et invisibles qui forment l'angle solide du sommet du cône proposé que l'on peut toujours, *sans aucune erreur finale*, considérer comme une *pyramide droite* du nombre infini n de faces planes latérales, égales et invisibles. Donc *quel que soit le*

nombre des angles plans, fût-il même infini, composant un angle solide, leur somme est toujours plus petite que quatre angles droits.

On peut faire $a = 2r$, $3r$, $4r$, $5r$, $6r$, $7r$, $8r$, etc. Et si $a = r$, le sommet du cône tombe au centre de la base; la surface latérale devient alors le cercle dont r est le rayon et l'on a $v = 360°$, comme cela doit être.

Remarques. — La *limite* de longueurs devenant, par exemple, de deux en deux fois plus petites ne peut être le *zéro absolu*, absence de toute longueur; car la limite et la variable sont nécessairement de même nature. Cette limite est donc ici le *zéro relatif*, c'est-à-dire une longueur infiniment petite : elle est *nulle* relativement à toute longueur finie, qu'elle ne peut augmenter ni diminuer, puisque alors la somme ou la différence ne serait pas la longueur finie cherchée.

D'un autre côté, la méthode des limites suppose que la limite constante jouit des propriétés générales de la variable limitée; et il faut pour cela que la variable *coïncide à l'infini* avec sa limite (n° 21). Donc la méthode des limites n'est en réalité que la seconde méthode infinitésimale rendue moins claire et moins simple. Celle-ci doit donc toujours être préférée à la méthode des limites pour les théories du mesurage et la détermination exacte de nombres finis inconnus.

Radicaux imaginaires du second degré.

37. — Il n'existe aucun nombre, exprimable ou non, soit *additif* soit *soustractif*, dont le carré ait le signe —; par conséquent *la racine carrée de tout nombre soustractif n'existe pas, est impossible.* Ainsi $\sqrt{-4}$ indique une *impossibilité absolue*, appelée *expression* ou *symbole imaginaire* : c'est un *radical imaginaire* du second degré, dont la propriété caractéristique est que *son carré reproduise* -4 *exactement*. Son cube serait donc alors $-4\sqrt{-4}$; sa puissance quatrième serait 16; etc.

38. — Les radicaux imaginaires du second degré se présentent inévitablement dans les éléments d'algèbre et y sont même très-utiles pour indiquer certaines impossibilités numériques. Or, par suite de la généralité complète attribuée volontairement aux formules, et pour conserver à celles-ci cette généralité si importante,

on est conduit nécessairement à soumettre à toutes les opérations du calcul littéral tous les symboles, imaginaires et autres.

En effet, si l'on ne voulait soumettre au calcul que les radicaux *réels* du second degré, il faudrait toujours supposer $a > b$ dans l'expression $\sqrt{a-b}$. Mais, à cause de l'indétermination des nombres que a et b représentent, il pourrait arriver, sans qu'on pût le prévoir, que l'hypothèse $a > b$ fût absurde et qu'on eût au contraire $a < b$ ou $a - b$ négatif. On calculerait donc alors avec un radical imaginaire comme si c'était un radical réel. On admet donc ainsi forcément que : *Le calcul des radicaux imaginaires du second degré est le même que celui des radicaux réels.* C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier directement.

39. — Par exemple, s'il faut multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{-16}$, on observera que -16 étant le carré de sa racine carrée, doit avoir pour facteur le carré de l'unité de cette racine; de sorte que $\sqrt{-16}$ est la même chose que $\sqrt{-1^2 \times 16}$. Et puisque le produit se trouve en opérant sur le multiplicande comme le multiplicateur en opérant sur l'unité, on voit que

$$\sqrt{a} \times \sqrt{-16} = \sqrt{-16\,a} = \sqrt{-16} \times \sqrt{a}.$$

Ainsi le produit est imaginaire en même temps que l'un quelconque de ses deux facteurs.

40. — De ce que $a\sqrt{-2} = \sqrt{-2\,a^2}$, on a $\sqrt{a^2 \times -2} = a\sqrt{-2}$. Ainsi *la racine carrée d'un produit indiqué se trouve en multipliant entre elles les racines carrées des facteurs de ce produit.* Donc puisque $-7 = 7 \times -1$ et $-9 = 9 \times -1$, on a

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} \text{ et } \sqrt{-9} = 3\sqrt{-1}.$$

41. — De plus, $-a = a \times -1$ et $-b = b \times -1$: donc

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{a\,b\,(-1)^2} = -\sqrt{a\,b} = \sqrt{-b}\sqrt{-a}.$$

Le produit de deux radicaux imaginaires, *quel que soit l'ordre des facteurs,* est donc toujours un nombre réel, mais de signe contraire à celui qu'il aurait si les deux radicaux n'étaient pas imaginaires.

42. — On trouve aussi que le quotient de deux radicaux est imaginaire ou réel suivant que les deux termes de la division sont l'un imaginaire ou tous les deux : chaque fois le signe du quotient est déterminé par ceux du dividende et du diviseur.

43. — Comparons maintenant les symboles dans $x^2 = -9$ et $y^2 = -64$. D'abord on sait que, dans le sens relatif de la soustraction et par extension d'idée, le reste algébrique $-9 > -64$; vu que *moins on soustrait plus il reste*. Mais parce que -1 désigne l'*unité soustractive*, il est clair que -9 et -64 renferment 9 et 64 de ces unités; donc au contraire $-9 < -64$.

Ayant donc $x^2 = 9(-1)$ et $y^2 = 64(-1)$, il vient $x = 3\sqrt{-1}$ et $y = 8\sqrt{-1}$. D'ailleurs, $\sqrt{-1}$ désignant l'*unité imaginaire*, on a $x < y$; car il est évident que : *moins le nombre imaginaire contient d'unités de cette singulière espèce plus il est petit*. Les expressions de x et de y sont en effet les nombres 3 et 8 d'*unités imaginaires*.

44. — Actuellement considérons les binômes dans lesquels le premier terme est un nombre rationnel et le second un nombre imaginaire, Or, en effectuant la multiplication et réduisant, on trouve

$$(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2.$$

Le binôme réel à termes positifs $a^2 + b^2$, est donc ainsi décomposé en deux facteurs binômes dont les seconds termes sont des nombres imaginaires, égaux et de signes contraires. Si donc on le divise par l'un de ses facteurs, il faudra multiplier les deux termes du quotient indiqué par l'autre facteur pour avoir celui-ci.

45. — Le produit des deux binômes $a + b\sqrt{-1}$ et $c + d\sqrt{-1}$ est de la forme générale $m + n\sqrt{-1}$. Et pour que ce produit soit zéro, il faut que l'un de ses facteurs, le second par exemple soit nul ; ce qui exige qu'on ait à la fois $c = 0$ et $d = 0$.

46. — De même le quotient du premier binôme ci-dessus divisé par le second se ramène toujours à la même forme générale, en multipliant par $c - d\sqrt{-1}$ les deux termes de la division ; ce qui ne change pas la valeur du quotient (n° 44).

47. — Effectuant la multiplication et réduisant, on trouve

$$(a \pm \sqrt{-b})^2 = a^2 - b \pm 2a\sqrt{-b}.$$

Donc pour savoir si un binôme imaginaire donné, tel que $1 + b\sqrt{-8}$, *est un carré parfait*, il faut le comparer à la formule précédente. Or, ici $2a = 6$, $a = 3$, $a^2 = 9$ et $9 - 8 = 1$. Donc le binôme proposé est le carré exact du binôme $3 + \sqrt{-8}$; celui-ci *est donc la racine carrée du premier*.

On verra de même que le binôme $4 - \sqrt{-5}$ est la racine carrée du binôme $11 - 8\sqrt{-5}$.

48. — Pour le double binôme réel du second degré, on a

$$(a \pm \sqrt{b})^2 = a^2 + b \pm 2a\sqrt{b}.$$

La comparaison à cette formule fait voir que la racine carrée du binôme $24 + 8\sqrt{8}$ est $4 + \sqrt{8}$. De même la racine carrée de $121 - 14\sqrt{72}$ est $7 - \sqrt{72}$.

Tel est le procédé le plus simple *pour extraire, quand elle est possible, la racine carrée d'un binôme numérique contenant un radical réel du second degré.*

Si l'on a $148 - 66\sqrt{5}$ et que l'on pose $2a = 66$ ou $a = 33$, le nombre a sera trop grand, puisque son carré surpasse déjà 148. Mais le second terme du binôme proposé revient à $22\sqrt{27}$; et alors la racine carrée de ce binôme est $11 - \sqrt{27}$.

49. — On a -1 pour les cubes des deux binômes imaginaires

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) \text{ et } \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Donc ces deux binômes et -1 sont *les racines cubiques de* -1.

50. Les racines imaginaires de degrés pairs peuvent toujours se ramener aux imaginaires du second degré. En général, la racine de degré $2n$ de -1 a toujours $2n$ valeurs imaginaires du second degré, l'unité imaginaire étant $\sqrt{-1}$.

C'est ce qu'on vérifie pour les racines de -1 dont les degrés sont 4, 6 et 8, en résolvant les équations :

$$x^4 + 1 = 0,\ x^6 + 1 = 0 \text{ et } x^8 + 1 = 0.$$

Chacune de ses équations s'*abaisse au second degré* en divisant les deux membres respectivement par x^2, x^3 et x^4; en posant $x + 1$ sur $x = v$; en élevant les deux membres de cette équation auxiliaire successivement au carré, au cube et à la puissance quatrième. Alors on peut calculer les valeurs de v dans chacune des équations résultantes; et ces valeurs étant substituées à v dans l'équation auxiliaire, il en résulte des équations du second degré en x pour chacune des équations proposées.

Remarques. — L'unité imaginaire est utile en Trigonométrie pour établir la *formule de Moivre*; et l'on sait que cette formule sert à résoudre les équations binômes ramenées à la forme $x^m = 1$

ou $x^m = -1$. On peut d'ailleurs calculer chacune des racines imaginaires du second degré, à l'aide des tables de logarithmes.

On sait aussi que la construction des polygones réguliers, *ordinaires* et *étoilés*, se rattache au théorème de Moivre.

Ce que signifie $\sqrt{-1}$ en Géométrie analytique.

51. — Considérons l'équation de l'ellipse rapportée à ses *axes principaux* $2a$ et $2b$, sur les axes rectangulaires de *symétrie* des x et des y, se coupant au *centre* de la courbe, savoir :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

On sait que $2a > 2b$. Soit d un demi-diamètre quelconque et (x, y) son extrémité sur l'ellipse. On a donc

$$y^2 + x^2 = d^2.$$

Les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans ces deux équations. Eliminant successivement y^2 et x^2, on trouve

$$b^2 d^2 = a^2 b^2 - (a^2 - b^2) x^2,$$
$$a^2 d^2 = a^2 b^2 + (a^2 - b^2) y^2.$$

On voit que $x = 0$ donne a^2 pour le *maximum* de d^2, et que par suite : *De tous les diamètres $2d$ de l'ellipse le plus grand est l'axe $2a$.*

On voit aussi que $y = 0$ donne b^2 pour le *minimum* de d^2. Ainsi *le second axe $2b$ est le plus petit de tous les diamètres $2d$ de l'ellipse.*

52. — Actuellement, considérons l'équation de l'hyperbole rapportée à ses *axes principaux* $2a$ et $2b$, sur les axes rectangulaires de *symétrie* des x et des y, se coupant au *centre* de la courbe, savoir :

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

Ce qu'il importe de remarquer d'abord, c'est que cette équation se trouve en changeant simplement b^2 en $-b^2$ ou b en $b\sqrt{-1}$ dans l'équation de l'ellipse. Il y a donc, dans l'hyperbole, une *impossibilité absolue* indiquée par $\sqrt{-1}$.

Or, posant $y = 0$ pour avoir les abscisses des points où la courbe rencontre l'axe des x, on aura $x = \pm a$. De sorte que le premier axe $2a$ est terminé à l'hyperbole en deux points qui en sont dits les *sommets*.

Mais si l'on pose $x = 0$ pour avoir les ordonnées des points où l'hyperbole rencontre l'axe des y, on trouvera $y^2 = -b^2$ et $y = \pm b\sqrt{-1}$. De sorte que le second axe serait exprimé par $2b\sqrt{-1}$. Or l'impossibilité indiquée par l'unité imaginaire, prouve uniquement ici que l'hyperbole ne rencontre pas son axe de symétrie des y, et que par suite les extrémités du second axe $2b$ sont deux points *imaginaires* de la courbe, lesquels en sont les *sommets imaginaires*.

Le premier axe $2a$, rencontrant la courbe, prend aussi le nom d'axe *réel* ou *transverse ;* tandis que le second axe $2b$ est l'axe *non transverse*, comme ne rencontrant pas l'hyperbole : c'est l'axe *à extrémités imaginaires* ou l'axe *imaginaire ;* bien que $2b$, coefficient de $\sqrt{-1}$, soit un nombre réel exprimable ou non.

55. — Soit d un demi-diamètre transverse quelconque et (x, y) son extrémité sur l'hyperbole. On a donc

$$y^2 + x^2 = d^2.$$

Eliminant x^2 entre cette équation et celle de la courbe, il vient

$$b^2 d^2 = a^2 b^2 + (a^2 + b^2) y^2.$$

On voit que $y = 0$ donne a^2 pour le *minimum* de d^2; d'où il suit que : *Le premier axe $2a$ de l'hyperbole est le plus petit de tous ses diamètres transverses ou réels.*

De plus, soit d un demi-diamètre non transverse, de telle sorte que d soit le coefficient de l'unité imaginaire. Il s'agit de calculer le *minimum* de ce coefficient.

Pour cela, puisque l'extrémité de d n'appartient pas à l'hyperbole et que pour ce point les coordonnées de la courbe sont imaginaires de la forme $x\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$; il en résulte que si l'on substitue ces valeurs, l'équation de l'hyperbole devient

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2. \text{ Déjà } y^2 + x^2 = d^2 ;$$

éliminent donc y^2 entre ces deux équations simultanées, on trouve

$$a^2 d^2 = a^2 b^2 + (a^2 + b^2) x^2.$$

On voit que $x = 0$ donne b^2 pour le *minimum* de d^2. Ainsi *le second axe $2b$ est le plus petit de tous les diamètres imaginaires ou non transverses de l'hyperbole.*

54. — L'abscisse x étant la même dans l'équation de l'hyperbole et dans la double équation $ay' = \pm bx$ de deux droites passant par le centre, on a

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2 \text{ et } a^2 y'^2 - b^2 x^2 = 0 ;$$

$$\text{d'où } y'^2 - y^2 = b^2 \text{ et } y' - y = \frac{b^2}{y' + y}.$$

Il est clair que l'abscisse x commune croissant indéfiniment, il en est de même des ordonnées y' et y; donc au contraire la différence $y' - y$ diminue sans cesse et devient infiniment petite, sans jamais devenir nulle, lorsque y' et y deviennent infiniment grandes avec x. Donc l'hyperbole s'approche sans cesse des deux droites $ay' = \pm bx$ sans jamais pouvoir les rencontrer, pas même à l'infini. *Ces deux droites sont donc à la fois les deux asymptotes de l'hyperbole et ses deux diamètres non transverses, égaux et infinis :* ils suivent immédiatement les deux diamètres transverses, infinis et égaux.

55. — La construction des asymptotes, d'après les équations ci-dessus, apprend que : *Les axes sont bissecteurs des angles compris par les asymptotes;* et de plus, que : *Si l'hyperbole est équilatère, c'est-à-dire si ses deux axes sont égaux, les asymptotes sont perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles droits des deux axes.* — Réciproquement, *si les asymptotes sont perpendiculaires entre elles, l'hyperbole est équilatère* (démontrer).

56. — L'unité imaginaire est un symbole d'impossibilité absolue et n'a pas d'autre signification. Mais, dans les Annales de Gergonne et dans plusieurs ouvrages spéciaux, différents auteurs ont cru pouvoir établir que $\sqrt{-1}$ *est un symbole de perpendicularité.* Or, pour démontrer cette proposition, voici le procédé de M. Vallès, en 1841, un peu modifié, à peu près comme ci-dessous, par l'auteur des *Véritables principes d'algèbre*, en 1863 :

« Dans le cercle dont O est le centre et a le rayon numérique, soient AOB et COD deux diamètres perpendiculaires entre eux, le premier étant horizontal. Si l'on a égard à l'opposition des directions, on aura $OB = +a$ et $OA = -a$, $OC = +a$ et $OD = -a$. D'ailleurs, puisque $OB = OC = +a$, il doit exister le moyen d'indiquer que OB, dans son mouvement autour du centre O, est passé à la position perpendiculaire OC. Supposons que ce moyen con-

siste à multiplier $+a$ par le facteur i, encore inconnu. On aura donc

$$(+a)\,i = \mathrm{OC}, \qquad (1).$$

Et comme OC passe aussi à la position perpendiculaire OA ou $-a$, on a pareillement

$$\mathrm{OC} \times i = -a. \qquad (2)$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient, réduction faite :

$$i^2 = -1\,;\ \text{d'où}\ i = \sqrt{-1}.$$

Ainsi $\sqrt{-1}$ *est le symbole de la perpendicularité ;* c'est-à-dire que le rayon OB ou a, passant à la position perpendiculaire OC, y devient $a\sqrt{-1}$. »

Or, *cette conséquence est absurde* et voici pourquoi : Puisque OC $= a$, les égalités (1) et (2) donnent $i = 1$ et $i = -1$. Le produit -1 de ces deux valeurs différentes n'est donc pas le carré de i, comme le suppose l'égalité $i^2 = -1$; et il est absurde d'en conclure que $i = \sqrt{-1}$.

Remarque. — Ce qui a pu tromper les différents auteurs, c'est que l'ellipse et l'hyperbole étant rapportées à leurs axes principaux $2a$ et $2b$; en changeant simplement b^2 en $-b^2$ ou b en $b\sqrt{-1}$ dans l'équation de l'ellipse, on a celle de l'hyperbole. Mais si les deux courbes sont rapportées à leurs diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, on trouve aussi que b'^2 ou b' dans l'équation de l'ellipse devient $-b'^2$ ou $b'\sqrt{-1}$ dans celle de l'hyperbole. Or, ici $2b'$ n'est pas perpendiculaire à $2a'$; donc $\sqrt{-1}$ n'est pas un symbole de perpendicularité.

Calcul des axes principaux.

57. — Les tracés de l'ellipse, de l'hyperbole et de ses asymptotes, d'après leurs équations numériques, sont les plus simples possible lorsque les longueurs des axes principaux sont calculées. Or, pour ces calculs, il faut chercher le *maximum* ou le *minimum* d'un diamètre, lorsque chaque courbe est *rapportée à deux diamètres*,

rectangulaires ou non, et à son centre. Telle est la courbe représentée par l'équation :

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = 4;$$

l'angle compris par les parties positives des diamètres sur les axes des x et des y, étant de 60°. D'ailleurs, si $x = k$ et $y = h$ satisfont à l'équation, elle est satisfaite aussi par $x = -k$ et $y = -h$. L'origine est donc en effet au *centre* de la courbe ; laquelle est une *ellipse*, puisque la condition caractéristique $B^2 - 4AC$ *négatif* est satisfaite, ce binôme devenant $4 - 8$ ou -4.

Cela posé, pour calculer les axes principaux $2a$ et $2b$, soit d un demi-diamètre quelconque et soit (x, y) son extrémité sur la courbe. On aura donc, à cause de $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ et en posant $d^2 = v$,

$$y^2 + xy + x^2 = v.$$

Les x et les y ont les mêmes valeurs respectives dans cette équation et la proposée. Eliminant donc les seconds membres, on trouvera

$$(v - 4)\, y^2 + (2v - 4)\, xy + (2v - 4)\, x^2 = 0.$$

Résolvant cette équation par rapport a y et désignant par u^2 la quantité *variable*, mais essentiellement *positive*, sous le radical, on aura

$$(v - 4)\, y = -(v - 2)\, x \pm u\, x \text{ et}$$

$$(v - 2)^2 - (2v - 4)\,(v - 4) = u^2;$$

$$\text{d'où} \quad v^2 - 8v = -12 - u^2,$$

$$\text{et } v = 4 \pm \sqrt{4 - u^2}.$$

La plus grande valeur 2 de ce second radical répond évidemment à $u = o$; et l'on voit que $4 + 2$ ou 6 est le *maximum* de v, d'où $a^2 = 6$; tandis que le *minimum* de v est $4 - 2$ ou 2 ; d'où $b^2 = 2$. Ainsi les deux axes principaux de l'ellipse proposée sont : $2a = 2\sqrt{6}$ et $2b = 2\sqrt{2}$.

De plus, *le maximum et le minimum de* v *rendent nulle la quantité* u^2 *sous le premier radical*, et donnent

$$(v-4)\,y = -(v-2)\,x.$$

Substituant donc successivement, dans cette équation, le *maximum* 6 et le *minimum* 2 de v, il vient les équations des axes $2a$ et $2b$:

$$y = -2x \text{ et } y = 0 \text{ ; d'où } n = -2 \text{ et } n' = 0.$$

A cause de $\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, les *directions* n et n' (ou si l'on veut les *coefficients angulaires* n et n') satisfont à la condition de *perpendicularité*

$$nn' + 1 + \frac{1}{2}(n + n') = 0.$$

Les axes principaux sont toujours perpendiculaires entre eux ; et ainsi leurs équations sont inutiles au tracé de l'ellipse proposée. Pour cela, on construit directement les deux axes, dont on connaît les longueurs exactes ou approchées ; d'où l'on déduit les deux foyers et le tracé de la courbe, soit par points, soit par un mouvement continu.

Enfin, soit E l'aire de l'ellipse proposée : on a

$$a^2 b^2 = 12,\ ab = 2\sqrt{3} \text{ et } E = 2\pi\sqrt{3}.$$

58. — Considérons encore la courbe représentée par l'équation rapportée à deux diamètres dont les parties positives comprenant un angle de 60°, savoir :

$$2y^2 - 6xy - 3x^2 = -30.$$

D'abord le binôme caractéristique $B^2 - 4AC$ est positif ici et se réduit à $36 + 24$ ou à 60 ; donc la courbe proposée est une hyperbole n'étant rencontrée que par l'axe des x. Il s'agit de calculer ses deux axes principaux $2a$ et $2b$, le premier *réel* ou transverse et le second *imaginaire* ou non transverse.

Pour cela, d étant un demi-diamètre quelconque et posant $d^2 = v$, on a cette seconde équation

$$y^2 + xy + x^2 = v.$$

Les x et les y ayant mêmes valeurs respectives dans les deux équations, on peut en éliminer les seconds membres, et cela donne

$$(2v + 30)\,y^2 - (6v - 30)\,xy - (3v - 30)\,x^2 = 0.$$

De là on tire $(2v + 30)\,y = (3v - 15)\,x \pm ux$ et

$$(3v - 15)^2 + (3v - 30)\,(2v + 30) = u^2\text{; d'où}$$

$$v^2 - 4v = 45 + \frac{1}{15}\,u^2 \text{ et } v = 2 \pm \sqrt{(49 + \frac{1}{15}\,u^2)}.$$

Il est clair que $u = 0$ donne $\sqrt{49}$ ou 7 pour la plus petite valeur du radical de v, et l'on a $v = 2 \pm 7$. Or, 7 étant un *minimum*, il en est de même de la somme positive $2 + 7$ ou 9 ; et il en est aussi de même de la différence négative $-(7 - 2)$ ou -5. Donc $a^2 = 9$ et $b^2 = -5$. Ainsi on a, pour calculer les axes principaux cherchés, $2a = 6$ et $2b = 2\sqrt{5}$.

Les longueurs des deux axes étant calculées exactes ou aussi approchées qu'on le veut, on peut les construire directement, ainsi que les deux foyers, les deux asymptotes et tracer une partie plus ou moins longue de chaque branche de l'hyperbole, soit par points, soit d'un mouvement continu.

59. — Maintenant, l'équation générale complète du second degré, à deux variables x et y, étant donnée numériquement; il est clair que pour passer du système d'axes proposé des coordonnées au système d'axes parallèles, afin de transporter l'origine au centre de la courbe, il faut changer y en $y + h$ et x en $x + k$, puis disposer des valeurs de h et k pour faire disparaître les premières puissances de x et de y dans la nouvelle équation. On aura alors, pour représenter la même courbe, l'équation dans laquelle deux diamètres sont sur les axes des x des y, savoir :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = G. \qquad (3)$$

Les nombres A, B, C, G sont donnés de signes quelconques, à l'exception de A, toujours positif. — (On connaît les moyens d'abréger beaucoup les calculs du développement et du nombre G).

L'équation (3) *aux diamètres* représente une ellipse ou une hyperbole suivant que le binôme caractéristique $B^2 - 4AC$ est *négatif*

ou *positif* : s'il est *nul*, l'équation représente deux droites parallèles, une seule droite ou est impossible suivant que le nombre G est *positif*, *nul* ou *négatif*.

60. — L'ellipse étant rapportée à deux diamètres comprenant l'angle quelconque mesuré par l'arc de θ degrés, dont 1 est le rayon numérique, trouver les formules générales pour calculer les axes principaux $2a$ et $2b$ de la courbe.

D'abord l'arc θ étant moindre que 90°, désignons par c son *cosinus* et par s son *sinus*. Soit toujours d un demi-diamètre quelconque, (x, y) son extrémité sur l'ellipse (5) et soit posé $v = d^2$. Dans le triangle dont d, x et y sont les côtés numériques, l'angle opposé à d est le supplément de θ, et l'on a

$$y^2 + 2cxy + x^2 = v.$$

Eliminant les seconds membres entre cette équation et la proposée (5), puis résolvant l'équation résultante par rapport à y, en observant que la quantité sous le radical est rendue nulle par le *maximum* a^2 et par le *minimum* b^2 de v, on aura

$$(Bv - 2cG)^2 - 4(Cv - G)(Av - G) = 0.$$

Développant et observant que $B^2 - 4AC$ est négatif, on trouve

$$v^2 - \frac{4G(A + C - Bc)}{4AC - B^2} v + \frac{4G^2 s^2}{4AC - B^2} = 0.$$

Et puisque les racines de cette équation sont a^2 et b^2, maximum et minimum de v, on a les deux relations :

$$a^2 + b^2 = \frac{4G(A + C - Bc)}{4AC - B^2} \text{ et } a^2 b^2 = \frac{4G^2 s^2}{4AC - B^2}. \quad (4)$$

Par ces deux relations générales, il sera facile de calculer les axes principaux $2a$ et $2b$ de toute ellipse représentée par une équation numérique *aux diamètres*, G *étant positif*. En voici des exemples :

I. — Si $\theta = 60°$, d'où $c = \frac{1}{2}$ et $s^2 = \frac{3}{4}$, si de plus, l'ellipse est représentée par l'équation

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = 4,$$

il est clair qu'on aura successivement :

$$a^2 + b^2 = 8 \text{ et } a^2 b^2 = 12;$$

$$a^2 = 6,\ b^2 = 2 \text{ et } E = 2\pi\sqrt{3}.$$

II. — Mais si l'on avait $y^2 - 2xy + 2x^2 = 4$, on aurait

$$a^2 + b^2 = 12 \text{ et } a^2 b^2 = 16;\ \text{d'où } E = 4\pi.$$

III. — Si $\theta = 45°$, d'où $c = s = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et qu'on ait

$$3y^2 - 8xy + 6x^2 = 48,$$

on trouve les longueurs en mètres des axes $2a$ et $2b$; d'où l'aire $E = 24\pi$ mètres carrés.

IV. — Enfin, si $B = 0$, les relations ci-dessus seront celles des axes avec chaque système de diamètres conjugués; tandis que si $\theta = 90°$, l'ellipse est rapportée à deux *diamètres rectangulaires*.

61. — Maintenant, pour l'hyperbole le binôme $B^2 - 4AC$ est positif et par conséquent $4AC - B^2$ est négatif. D'ailleurs, en changeant b^2 en $-b^2$, les rélations (4) de l'ellipse deviennent celles de l'hyperbole, savoir :

$$a^2 - b^2 = -\frac{4G(A + C - Bc)}{B^2 - 4AC} \text{ et } a^2 b^2 = \frac{4G^2 s^2}{B^2 - 4AC}. \quad (5)$$

Etant donc donnée l'équation numérique aux diamètres de l'hyperbole, ces deux relations feront connaître les deux axes principaux $2a$ et $2b$ de la courbe, $2a$ transverse et $2b$ non transverse. On pourra donc alors construire les deux axes, les deux foyers, les deux asymptotes et tracer une partie plus ou moins longue de chaque branche. — Voici plusieurs exemples du calcul des axes principaux $2a$ et $2b$:

I. — Si $\theta = 60°$, d'où $c = \frac{1}{2}$, $s^2 = \frac{3}{4}$ et qu'on ait

$$y^2 + 4xy + 2x^2 = 4;$$

les deux relations (5) donnent successivement :

$$a^2 - b^2 = -2 \text{ et } a^2b^2 = 6 ; \; a^4 + 2a^2 = 6,$$

$$a^2 = -1 + \sqrt{7} \text{ et } b^2 = (1 + \sqrt{7}) \times -1 ;$$

$$2a = -2 + \sqrt{28} \text{ et } 2b = (2 + \sqrt{28})\sqrt{-1}.$$

II. — Si $\theta = 90°$, les deux équations numériques

$$x^2 - 2xy = 6 \text{ et } y^2 + 2xy - x^2 = -4,$$

représentent deux *hyperboles équilatères*. Car, d'après les relations (5), les deux axes de la première sont égaux, aussi bien que ceux de la seconde.

III. — Enfin, l'équation numérique, rapportée à *deux diamètres rectangulaires*, savoir :

$$y^2 - 2xy - 2x^2 = -4,$$

représente l'hyperbole dont les deux axes sont :

$$2a = \sqrt{8} \text{ et } 2b = 4.$$

Volumes de révolution.

62. — L'origine des coordonnées rectangulaires étant au sommet extrémité de l'axe de symétrie des x, on sait que l'équation commune aux trois courbes du second degré est

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Il s'agit de calculer le volume S_1 engendré par la révolution autour de l'axe des x du demi-segment qui répond à $x = h$.

Pour cet effet, concevons la droite numérique donnée h divisée en un nombre infini n de parties égales à i par des plans perpendiculaires. On a donc $h = i\,n$, et ces plans parallèles entre eux divisent en même temps le volume S_1 en n tranches parallèles toutes d'égale épaisseur i infiniment petite et invisible. Soit T la m ième de ces tranches à partir de l'origine : le plus grand des deux cercles parallèles bases de T répondant à $x = i\,m$, et la hauteur i de T étant infiniment petite, il est clair que le plus grand des deux cercles ne surpasse l'autre que d'un infiniment petit du second ordre et l'on peut toujours, sans aucune erreur finale, con-

sidérer la m ième tranche T comme un cylindre droit circulaire de hauteur i (n° 32). Ainsi l'on a

$$T = \pi i y^2 \text{ ou } T = \pi (2pi^2 m + qi^3 m^2).$$

Or le volume S_1 est la somme de toutes les tranches, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = n$. De sorte que

$$S_1 = \pi (2pi^2 Sn + qi^3 Sn^2).$$

D'ailleurs, n infini donne, sans aucune erreur finale, $Sn = \frac{1}{2} n^2$ et $Sn^2 = \frac{1}{3} n^3$. Substituant donc et réduisant d'après $i n = h$, on trouve

$$S_1 = \pi h^2 (p + \frac{1}{3} qh).$$

COROLLAIRE I. — Pour la parabole, on a successivement

$$q = 0, k^2 = 2ph \text{ et } S_1 = \frac{1}{2} \pi k^2 h.$$

Donc le *paraboloïde* de révolution autour de son axe de symétrie est la moitié du cylindre circulaire droit de même base et de même hauteur.

II. — Pour le *segment d'ellipsoïde* S_2 décrit par la révolution du demi-segment elliptique autour du grand axe $2a$, l'origine étant à l'extrémité de cet axe, on a

$$ap = b^2, a^2 q = -b^2 \text{ et } a^2 S_2 = \pi b^2 h^2 (a - \frac{1}{3} h).$$

Si donc $a = b = r$, S_2 devient le *segment sphérique* dont h est la hauteur et r le rayon de la sphère : donc alors

$$S_2 = \pi h^2 (r - \frac{1}{3} h).$$

III. — Soit E_1 l'*ellipsoïde allongé* engendré par la révolution de la demi-aire elliptique autour de son grand axe. Comme alors $h = 2a$, il vient

$$E_1 = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Soit E_2 l'*ellipsoïde aplati* décrit par la révolution de la demi-aire elliptique autour de son petit axe $2b$: on trouve

$$E_2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \text{ : donc } E_1 < E_2.$$

IV. — Soit S_3 le segment d'*hyperboloïde* engendré par la révolution du demi-segment d'hyperbole autour de son axe de symétrie des x, l'origine étant alors à l'extrémité positive du premier axe $2a$. Dans cette hypothèse on a

$$ap = b^2,\ a^2q = b^2 \text{ et } a^2S_3 = \pi b^2h^2\left(a + \frac{1}{3}h\right).$$

On peut faire $h = a$, ou bien poser $b = a$; etc.

63. — Les coordonnées étant rectangulaires et a désignant une droite numérique donnée, considérons la courbe représentée par l'équation

$$ay^2 = x\,(a - x)^2.$$

D'abord cette courbe ne s'étend pas du côté des abscisses négatives : elle est limitée par l'axe des y, lequel lui est tangent à l'origine; vu que $x = 0$ donne $y = \pm 0$. Ensuite, toute valeur de x, moindre que a, donne à y deux valeurs égales et de signes contraires ; mais si $x = a$, on a $y = \pm 0$. Enfin, si x croît indéfiniment à partir de a, il est clair que les couples de valeurs de y, égales et de signes contraires, croissent aussi indéfiniment à partir de zéro. La courbe proposée est donc composée de deux branches infinies, se raccordant à l'origine, se coupant au point pour lequel $x = a$ et y terminant une sorte de feuille, dont l'aire est divisée en deux parties égales à P par le seul axe a de symétrie de cette feuille.

Cela posé, procédant comme au numéro précédent, on verra que l'expression du volume engendré par la révolution de la demi-feuille P autour de l'axe a de symétrie est

$$vol.\ P = \frac{1}{12}\pi a^3.$$

64. — Les axes conjugués des x et des y d'une parabole tracée sont le diamètre OX et la tangente OY à l'origine O ; l'angle YOX étant mesuré par l'arc de θ degrés dont l'unité linéaire est le rayon. Soit OB$=k$ et CB$=h$ les coordonnées du point C de la courbe : achevant le parallélogramme OBCA, son aire est $hk \sin \theta$. L'arc OC de la parabole divise OBCA, en deux parties OAC et OBC dont il s'agit de calculer les aires. Or, concevant OAC décomposée en un nombre infini n de tranches parallèles à OX, toutes d'égale hauteur $i \sin \theta$, d'où $i\,n=h$, et raisonnant comme plus haut, on verra que :

$$\textit{aire}\ \text{OAC}=\frac{1}{3}hk \sin \theta\ ;\ \text{d'où}\ \textit{aire}\ \text{OBC}=\frac{2}{3}hk \sin \theta.$$

COROLLAIRES. — Si $\theta=90°$, la figure OACB est un rectangle ; et alors *les volumes engendrés par les révolutions des figures* OAC *et* OBC *autour de l'axe de symétrie* OX *sont équivalents.*

II. — Observant que n infini donne $Sn^4=\frac{1}{5}n^5$, on verra que si le système OBCA fait une révolution autour de OY, *les volumes décrits par* OAC *et* OBC *sont le cinquième et les 4 cinquièmes du cylindre engendré par le rectangle* OBCA.

REMARQUE. — Lorsque les demi-axes a et b sont égaux, l'ellipse devient la circonférence dont a est le rayon numérique ; et l'aire elliptique devient l'aire du cercle, savoir πaa. Il faut donc que πab exprime l'aire de l'ellipse proposée.

Surfaces du second ordre.

65. — On sait que l'équation complète du second degré, aux trois coordonnées variables x, y, z, représente *cinq genres de surfaces du second ordre,* ainsi que leurs *variétés,* suivant les valeurs et les signes des coefficients numériques. Ces genres sont : l'*Ellipsoïde,* l'*hyperboloïde à une nappe,* l'*hyperboloïde à deux nappes,* le *paraboloïde elleptique* et le *paraboloïde hyperbolique.* — Les deux dernières surfaces n'ont point de *centre,* tandis que les trois premières ont chacune un *centre unique de symétrie,* intersection des *axes rectangulaire de symétrie des* x, *des* y *et des* z. Aussi les trois dernières surfaces rapportées chacune à son centre et à ses trois axes de symétrie,

sont-elles représentées par les équations *les plus simples* ci-dessous, où les signes sont mis en évidence :

$$Lx^2+My^2+Nz^2=H \text{ et } L<M<N,$$
$$Lx^2+My^2-Nz^2=H \text{ et } L>M,$$
$$Lx^2-My^2-Nz^2=H \text{ et } M<N.$$

Pour rendre homogène chacune de ces équations, soit posé

$$La^2=H,\ Mb^2=H \text{ et } Nc^2=H\ ;$$

d'où l'on tire les valeurs de L, M et N. Substituant ces valeurs dans les équations proposées et divisant les deux membres de chacune par H, on trouve les équations homogènes ci-dessous de l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde à une nappe et de l'hyperboloïde à deux nappes :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ et } a>b>c,$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{z^2}=1 \text{ et } a<b,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ et } b>c.$$

66. — La discussion de ces équations fait voir que dans l'ellipsoïde les droites numériques $2a>2b>2c$ ont leurs milieux au centre de la surface, et sont situées sur les axes de symétrie des x, des y et des z. Voilà pourquoi ces trois droites sont nommées les *axes principaux* de l'ellipsoïde : $2a$ est le *grand axe*, $2b$ l'*axe moyen* et $2c$ le *petit axe*. Ces trois axes sont terminés de part et d'autre à la surface en six points appelés *sommets* de l'ellipsoïde.

Le changement de c^2 en $-c^2$ ou de c en $c\sqrt{-1}$, dans l'équation de l'ellipsoïde, donne l'équation de l'hyperboloïde à une nappe. Cette dernière surface a donc quatre *sommets réels*, extrémités du *premier axe* $2a$ et du *second axe* $2b$ (on sait que $2a<2b$) : elle a deux *sommets imaginaires*, parce que les extrémités du *troisième axe* $2c$ n'appartenant pas à l'hyperboloïde en sont deux *points imaginaires*. Voilà pourquoi le troisième axe $2c$ est aussi appelé *axe imaginaire* : c'est une longueur réelle à extrémités imaginaires.

Enfin, si dans l'équation de l'ellipsoïde on change simplement b^2 et c^2 en $-b^2$ et $-c^2$ ou b et c en $b\sqrt{-1}$ et $c\sqrt{-1}$, on aura

l'équation de l'hyperboloïde à deux nappes. Dans cette surface le *premier axe* $2a$ est seul *réel*, puisque ses deux extrémités appartenant à la surface en sont les deux *sommets réels*. Mais le *second axe* $2b$ et le *troisième* $2c$ (on sait que $2b > 2c$) sont aussi appelés *axes imaginaires*, parce que leurs extrémités n'appartenant pas à la surface proposée, en sont les quatre *sommets imaginaires*.

67. — Procédant comme pour l'ellipse et pour l'hyperbole, on démontre que : 1° De tous les diamètres de l'ellipsoïde le premier axe $2a$ est le plus grand et le troisième $2c$ le plus petit.

2° Le premier axe $2a$ de l'hyperboloïde à une nappe est le plus petit de tous ses diamètres réels, tandis que le troisième axe $2c$ est le plus petit de tous ses diamètres imaginaires.

3° Enfin dans l'hyperboloïde à deux nappes le premier axe $2a$ et le troisième $2c$ sont l'un le plus petit de tous ses diamètres réels et l'autre le plus petit de tous ses diamètres imaginaires.

Il résulte de ces trois propositions que chacune des surfaces douées de centres ne peut avoir qu'un seul système d'axes principaux et de symétrie.

68. — L'étude de cinq surfaces du second ordre et de leurs variétés devient très-facile quand on les considère successivement, mais rapportées d'abord à leurs axes principaux et ensuite à leurs axes conjugués. — De plus, la décomposition en une infinité de tranches parallèles, toutes d'égale épaisseur infinement petite, et la résolution des triangles sphériques rectangles, conduisent aux formules pour calculer les volumes de *segments* dans les cinq surfaces rapportées à leurs diamètres conjugués et à leurs paramètres diamétraux, quant aux deux paraboloïdes. Il en résulte les formules plus simples en axes et en paramètres principaux donnés numériquement.

Observons d'ailleurs que si $b=c=a$, l'ellipsoïde devient la sphère dont a est le rayon numérique ; par conséquent le volume E de l'ellipsoïde devient celui de la sphère, savoir *4 tiers* πaaa. Il faut donc qu'on ait la formule :

$$E=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Cette formule est ainsi démontrée très-clairement et le plus simplement possible. — Si $c=b$ et $b=a$, on a les expressions des vo-

lumes de l'ellipsoïde *allongé* et de l'ellipsoïde *aplati*, comme plus haut (n° 62, coroll. II et III).

69. — Les trois propositions plus haut (n° 66) étant clairement démontrées, rectifient les erreurs commises sur les axes $2c$ des deux hyperboloïdes en admettant que *tout nombre soustractif est d'autant plus grand que sa valeur absolue est plus petite ;* car alors, dans chacune des deux surfaces, le troisième axe $2c$ serait le *plus grand* de tous ses diamètres imaginaires ; ce qui est absurde.

Nous avons nous mêmes commis ces erreurs, d'abord parce que nous n'avions pas remarqué que *tout nombre négatif, considéré en lui-même, est d'autant plus petit qu'il renferme moins d'unités soustractives, représentées chacune par* -1. Ensuite parce que nous ne connaissions pas bien *ce que signifie* $\sqrt{-1}$ *en géométrie analytique.*

Observons encore que si les axes principaux doivent se tracer sur la figure proposée, lorsqu'on en connaît les longueurs, les équations de ces axes sont nécessaires à cet effet ; tandis qu'elles sont inutiles, si l'on peut employer une autre figure.

70. — La théorie du *maximum* et du *minimum* du second degré, appliqué à chacune des trois surfaces *rapportée à ses diamètres conjugués,* fournit une équation finale du troisième degré, ayant pour racines les carrés des trois demi-axes principaux de la surface. Or, d'après la composition des coefficients avec les racines, cette équation finale donne les trois relations des axes avec un système quelconque de trois diamètres conjugués, dont on connaît les carrés numériques.

Les trois relations pour l'ellipsoïde fournissent celles pour chacune des deux autres surfaces, moyennant les changements de signes de certains carrés : il résulte, comme corollaires des trois relations, d'importantes propriétés de la surface proposée.

Si d'ailleurs l'équation finale est numérique et qu'elle ait une racine connue, diviseur du dernier terme, on pourra calculer les carrés des trois demi-axes principaux cherchés, aussi bien que les équations de ces axes.

71. — Pour calculer les axes principaux de la surface rapportée à trois diamètres rectangulaires, d désignant un demi-diamètre quelconque, on a $d^2=u$ et les deux équations générales simultanées :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G,\ x^2+y^2+z^2=u.$$

Eliminant les seconds membres et résolvant l'équation finale par

rapport à x, en observant que le maximum et le minimum de u rendent nulle la quantité Q soumise au radical ; résolvant de même l'équation Q=o par rapport à y, la quantité Q′ sous le radical est aussi annulée par le maximum et le minimum de u. L'équation Q′=o est indépendante de z et se simplifie en y posant uv=G. Mais alors u disparaît de l'équation, laquelle devient

$$v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v$$
$$-(ABC+2DEF-CD^2-BE^2-AF^2)=o.$$

Le seul aspect de cette équation, devenue numérique, suffit pour faire connaître le genre de la surface proposée, rapportée à ses diamètres rectangulaires. — On ne peut calculer les carrés des demi-axes de cette surface que si l'équation numérique finale, du troisième degré en v, a une racine connue, diviseur du dernier terme. — (Voir à ce sujet la 2^{me} édit. du Traité de géométrie analytique, Liége, H. Dessain, 1849).

Liége, Juin 1865.

V. — *Nouvelles Tables usuelles des Logarithmes des nombres naturels et des lignes trigonométriques et Tables inverses, en deux feuilles, accompagnées d'une introduction renfermant un précis de Trigonométrie pure, ainsi que la disposition et l'usage de ces tables,*

PAR

F. FOLIE,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE DES MINES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE INDUSTRIELLE DE LIÉGE.

AVANT-PROPOS.

L'idée première des tables que nous avons l'honneur de présenter à la Société royale des Sciences appartient à l'illustre W. Struve qui les fit imprimer pour les astronomes de Pulkova et en fit don aux observatoires de l'Allemagne avec lesquels il était en relation.

C'est dans l'un de ceux-ci que l'on a eu l'obligeance de nous les communiquer, et nous avons pu apprécier les nombreux services qu'elles rendent aux astronomes dans leurs calculs préparatoires.

On comprend aisément que Struve n'ait pas étendu sa table aux lignes trigonométriques; l'approximation la plus grossière en effet ne tolère pas des erreurs supérieures à quelques secondes dans les angles observés en astronomie; les moindres tables dont on puisse se servir pour cet objet, même dans les calculs de première approximation, sont donc les tables à 5 décimales de Lalande, que l'on emploie du reste très-fréquemment.

Le but que nous nous efforçons de remplir est tout différent; nous voudrions vulgariser l'application des logarithmes à tous les calculs de l'ingénieur, de l'architecte et de l'arpenteur, et montrer les immenses avantages que présente l'emploi des tables de Struve.

Comme dans la pratique la connaissance des angles à une demi-minute près est généralement suffisante, nous avons pu construire des tables analogues pour les lignes trigonométriques, et renfermer en deux feuilles tous les logarithmes que l'on doit chercher aujourd'hui dans un volume toujours lent et incommode à manier.

Avant d'entrer dans le détail de la disposition et de l'usage de ces tables, nous croyons utile de rappeler brièvement les principales formules employées dans la résolution des triangles.

Nous croyons avoir observé que la plupart de ceux qui ne s'adonnent pas à l'étude des mathématiques supérieures oublient souvent, alors qu'ils en pourraient retirer des fruits, les principes essentiels de la trigonométrie et le calcul des logarithmes, avec lesquels ils ont été familiarisés dans les colléges.

Ce n'est pas cependant faute de voir appliquer ces méthodes très-fréquemment dans toute la série de leurs études; mais soit qu'elles leur aient été présentées dans les éléments comme hérissées de difficultés (et nombre d'auteurs tombent dans ce travers), soit qu'il leur répugne de se servir de tables dont on ne leur a rendu l'emploi ni assez facile ni assez familier, ils en perdent bientôt l'habitude. Cette habitude, nous voudrions la donner à tous ceux qui connaissent les quatre premiers livres de la géométrie, et la théorie arithmétique ou même simplement les propriétés essentielles des logarithmes; nous voudrions aussi leur montrer les avantages de l'emploi si aisé de nos tables sur celui de la règle à calcul que l'on devrait réserver, nous semble-t-il, aux opérations exécutées sur le terrain.

On nous permettra d'adresser ici nos remerciements aux astronomes à qui nous devons et la connaissance des tables de Struve, et le peu d'habitude que nous avons pu acquérir des calculs trigonométriques; en premier lieu au célèbre directeur de l'observatoire de Bonn, M^r^ Argelander, qui a mis à notre disposition, avec une générosité et une affabilité exquises, ses excellentes leçons et ses beaux instruments; ensuite à MM. Schönfeld et Krüger qui dirigent aujourd'hui, le premier, l'observatoire de Mannheim, le second celui de Helsingfors, et qui se sont souvent distraits de

leurs travaux les plus importants pour nous aider de leurs savants conseils.

Précis de trigonométrie pure.

Nous ne nous occuperons, dans notre précis, que de trigonométrie pure; c'est-à-dire que nous n'étudierons pas le moins du monde les fonctions circulaires ou lignes trigonométriques envisagées dans le cercle; il nous semble naturel cependant, quoique nous ne les considérions absolument que comme des rapports entre de certains côtés d'un triangle, de leur conserver les dénominations universellement adoptées de sinus, cosinus, tangente et cotangente, les seules dont nous fassions usage.

Résolution des triangles.

Un triangle renferme trois côtés que nous désignerons toujours par a, b, c, et trois angles respectivement opposés à ces côtés : A opposé à a, B à b, C à c. La relation connue : $A + B + C = 180° = \pi$, permet de trouver le troisième angle si l'on connaît les deux autres; en réalité donc la détermination complète du triangle revient à celle des cinq quantités a, b, c, A, B; et nous verrons, comme la géométrie le prouve du reste, que la connaissance de trois de ces quantités permet, en général, de déterminer les deux autres.

Si le triangle est rectangle, en nommant A l'angle droit, il ne restera à connaître que les quatre quantités a, b, c, B ou C pour la détermination complète desquelles deux quelconques d'entre elles suffiront.

Résolution des triangles rectangles.

Nous commencerons par ce dernier cas comme le plus simple, et nous allons rechercher les relations qui existent entre les quantités a, b, c, B, C; à cet effet, posons d'abord quelques définitions destinées à abréger le discours. (*)

(*) On nous demandera peut-être si nos définitions correspondent identiquement à celles qui sont généralement adoptées; il est clair qu'en fait il en est ainsi : mais c'est une chose dont nous n'avons pas à nous préoccuper. En effet, le rapport d'un côté à l'hypothénuse ne dépendant que de l'angle opposé est une

Nous appellerons sinus d'un angle le rapport du côté opposé à l'hypothénuse :

$$(1) \qquad \sin B = \frac{b}{a}. \qquad \sin C = \frac{c}{a}.$$

Le cosinus d'un angle est le rapport du côté adjacent à l'hypothénuse :

$$(2) \qquad \cos B = \frac{c}{a}. \qquad \cos C = \frac{b}{a}.$$

La tangente d'un angle est le rapport du côté opposé au côté adjacent de l'angle droit :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}. \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}.$$

La cotangente d'un angle est le rapport du côté de l'angle droit adjacent au côté opposé :

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}. \qquad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}.$$

De ces quatre définitions, nous allons déduire quelques relations très-importantes.

Les formules 1) et 2) élevées au carré et ajoutées donnent :

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1, \text{ puisque } b^2 + c^2 = a^2.$$

Donc : (5) $\qquad \sin^2 B + \cos^2 B = 1.$

De même pour l'angle C, quels que soient du reste B et C.

Divisées l'une par l'autre ces mêmes formules (1) et (2) conduisent à :

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}; \text{ or 3) : } \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \text{ donc:}$$

$$(6) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}. \text{ De même : } \operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C}.$$

certaine fonction de cet angle, que nous aurions pu nommer fonction S, mais à laquelle nous avons conservé la dénomination de sinus pour éviter des notations nouvelles ; et la rigueur exige seulement que nous restions fidèle à notre définition.

On en déduit encore par la division inverse :

$$\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{b}\text{ ; or 4) : cotg B} = \frac{c}{b}\text{ ; donc :}$$

(7) : $$\text{cotg B} = \frac{\cos B}{\sin B}.$$ De même : $$\text{cotg C} = \frac{\cos C}{\sin C}.$$

Par la multiplication des formules (3) et (4) ou (6) et (7) on arrive à :

$$\text{tg B cotg B} = \frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1\text{ ; donc :}$$

(8) $$\text{tg B cotg B} = 1.\ \text{cotg B} = \frac{1}{\text{tg B}}.$$ De même de C.

Si nous comparons les valeurs de $\frac{c}{a}$ et celles de $\frac{c}{b}$ tirées respectivement des formules (1) et (2) ou (3) et (4) nous verrons que : $\frac{c}{a} = \sin C = \cos B$, et que : $\frac{c}{b} = \text{tg C} = \text{cotg B}$; et remarquant que C est le complément de B et réciproquement, nous en conclurons :

(9) { Le cosinus d'un angle est égal au sinus de son complément ; la cotangente d'un angle est égale à la tangente de son complément ; ou les deux propositions réciproques.

Les formules que nous venons d'établir suffisent à la résolution des triangles rectangles.

Nous allons aborder les quatre cas qui peuvent se présenter, en réservant les applications numériques jusqu'après l'exposition des tables.

1er Cas. On donne l'hypothénuse a et un angle B. L'angle C est donc connu ; et les formules (1) et (2) déterminent les côtés b et c :

$$b = a \sin B.\quad c = a \cos B.$$

2e Cas. On donne un côté b de l'angle droit et un angle.

Les deux angles B et C sont encore connus, et le 2d côté c ainsi que l'hypothénuse a seront donnés par les formules :

$$c = b \operatorname{cotg} B = \frac{b}{\operatorname{tg} B}. \quad a = \frac{}{\sin B}.$$

3e Cas. On donne l'hypothénuse a et un côté b de l'angle droit.

Nous cherchons d'abord un angle par la formule (1) $\sin B = \frac{b}{a}$.

Quant au côté c, on peut le trouver soit par la formule connue

$$c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$$

soit, ce qui est plus expéditif, par

$$(2) \qquad c = a \cos B,$$

puisque l'angle B est maintenant connu.

4e Cas. On donne les deux côtés b et c de l'angle droit. Il suffirait de déterminer un angle, puisque l'hypothénuse $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; mais ce calcul est très-long à effectuer; ici encore, nous chercherons d'abord l'angle B par:

$$(3) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c};$$

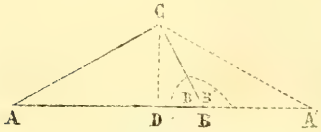
puis l'hypothénuse a par (1) :

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

Quant à l'aire du triangle, elle se déterminera dans tous les cas par la formule très-simple : $T = \frac{1}{2} bc$.

Résolution des triangles quelconques.

Avant d'entrer dans l'examen des quatre cas renfermés dans le problème général, établissons, comme pour les triangles rectangles, les formules dont nous aurons à faire usage.



Considérons d'abord le triangle acutangle ABC dans lequel, outre les conventions déjà faites, nous ferons constamment la hauteur CD $= h$; et les

deux segments de la base respectivement égaux AD à s, DB à t.

Dans les triangles rectangles ACD et BCD, en vertu de la formule (1), nous pouvons écrire :

$$h = b \sin A. \quad h = a \sin B.$$

D'où : $b \sin A = a \sin B$; ou $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$. En prenant AC pour base, nous trouverions de même

$$c \sin A = a \sin C ; \text{ ou : } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

et de la comparaison de ces deux formules :

$$(10) \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

c'est-à-dire : les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés. Reste à démontrer que cette formule s'applique également aux triangles obtusangles.

Considérons en effet le triangle A'BC, et nommons a', b', c' ses côtés, A' B', C' ses angles.

Comme précédemment, les deux triangles BCD et A'CD nous fourniront par les formules (1) les relations $h = b' \sin A'$. $h = a' \sin B'$; et si nous convenons maintenant de poser (*)

$$(10)\text{bis. } \sin B' = \sin B, \text{ ou: } \sin (180^\circ - B) = \sin (\pi - B) = \sin B;$$

c'est-à-dire de regarder le sinus d'un angle obtus comme étant le sinus de son supplément, la dernière formule deviendra $h = a' \sin B'$, et, comparée à la précédente, donnera :

$$b' \sin A' = a' \sin B'.$$

En prenant b' pour base on aurait de même :

$$c' \sin A' = a' \sin C';$$

(*) En vertu de nos définitions, il n'existe pas de sinus ou de cosinus d'un angle obtus. Ce n'est donc que pour la symétrie des formules que nous écrirons sin B' qu'on doit toujours traduire par sin B; plus bas, la même raison de symétrie nous fera écrire — cos B' au lieu de cos B; et pour rester fidèle à nos définitions, nous devrons toujours lire la 2de quantité au lieu de la 1re. Tel est le sens précis de nos conventions.

et de ces deux relations :

$$\frac{\sin A'}{a'} = \frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin C'}{c'}; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Fig. I. Le même triangle ABC nous conduit à une autre relation très-simple déduite des formules (2).

Celles-ci, appliquées aux deux triangles ACD et BCD, donnent en effet :

$$s = b \cos A. \quad t = a \cos B.$$

Mais $c = s + t$; donc :

$$(11) \qquad c = a \cos B + b \cos A.$$

Pour étendre cette formule au cas où le côté c serait adjacent à un angle obtus, reprenons le triangle précédent A'BC et posons $A'D = s'$.

Les formules 2, nous donneront dans les triangles A'CE

$$s' = b' \cos A' ;$$

et comme $t = a' \cos B$ (vu que a' n'est autre chose que a), et que $c' = s' - t$, il s'en suit :

$$c' = b' \cos A' - a' \cos B.$$

Convenons actuellement de faire : (*)

(11) bis: $\cos B' = -\cos B$, ou : $\cos(180^\circ - B) = \cos(\pi - B) = -\cos B$,

ou de regarder le cosinus d'un angle obtus comme étant le cosinus de son supplément pris en signe contraire, cette formule deviendra

$$c' = b' \cos A' + a' \cos B', \qquad \text{c. q. f. d.}$$

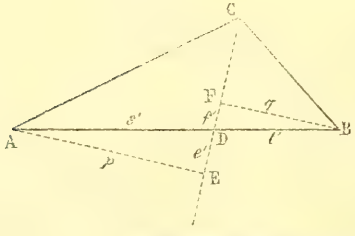


Fig. II. Une autre séparation du triangle en deux triangles rectangles va nous faire connaître des relations nouvelles.

Traçons la bissectrice CD de l'angle C et abaissons sur cette droite les perpendiculaires AE = p. BF = q ; posons CE = e, CF = f.

(*) Voir la note précédente.

Par le moyen des formules 1) et 2) les triangles ACE, BCF donnent :

$$p=b \sin \frac{1}{2}C.\ e=b \cos \frac{1}{2}C.\ q=a \sin \frac{1}{2}C.\ f=a \cos \frac{1}{2}C.$$

De même en posant dans les triangles ADE, BDF, AD=s', DE=e' ; DB=t', DF=f', nous aurons :

$$p=s' \sin D.\ e'=s' \cos D.\ f'=t' \cos D.\ q=t' \sin D.$$

Remarquons que l'angle D de ces triangles se trouve dans le triangle DBC par la formule :

$$D=180^\circ - B - \frac{1}{2}C.$$

dans ADC par la propriété de l'angle extérieur :

$$D=A+\frac{1}{2}C$$

d'où ajoutant :

$$2D = 180^\circ + A - B \quad \text{ou} \quad \begin{cases} D=90^\circ+\frac{A-B}{2} \\ D=90^\circ-\frac{B-A}{2} \end{cases}$$

Au moyen des remarques 9) nous pourrons mettre dans les formules ci-dessus, au lieu de cos D et de sin D, les valeurs respectives $\sin\frac{B-A}{2}$ et $\cos\frac{B-A}{2}$, et ces formules se transformeront en :

$$p=s' \cos\frac{B-A}{2}.\ e'=s' \sin\frac{B-A}{2}.\ f'=t' \sin\frac{B-A}{2}.\ q=t' \cos\frac{B-A}{2}.$$

Or d'un côté

$$EF=e'+f'=(s'+t') \sin\frac{A-B}{2}=c \sin\frac{B-A}{2}.$$

D'un autre :

$$EF=e-f=(b-a)\cos\frac{1}{2}C.$$

De même :

$$p+q=(s'+t')\cos\frac{B-A}{2}=c\cos\frac{B-A}{2}.$$

Et :

$$p+q=(b+a)\sin\frac{1}{2}C.$$

Comparant ces formules deux à deux :

$$(12)\qquad \begin{cases} c\sin\dfrac{B-A}{2}=(b-a)\cos\dfrac{1}{2}C. \\ c\cos\dfrac{B-A}{2}=(b+a)\sin\dfrac{1}{2}C. \end{cases}$$

Divisant ces deux dernières, membre à membre :

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\frac{b-a}{b-a}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

Si $a>b$, d'où $A>B$, nous écririons de même :

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

REM. Cette démonstration est générale parce que tous les angles dont nous nous sommes servis sont toujours aigus, quels que soient du reste les angles A, B, C du triangle ; en outre l'angle $\frac{1}{2}(B-A)$ ou $\frac{1}{2}(A-B)$ selon que $B>A$ ou $A>B$ est toujours aigu ; car si l'on avait $\frac{1}{2}(B-A)>\frac{\pi}{2}$ ou $B-A>\pi$, il en résulterait $B>\pi+A$ ce qui est absurde, puisque $A+B+C=\pi$.

Un théorème de géométrie traduit en langage algébrique, telle sera notre dernière formule ; mais pour la transformer de la manière la plus propre au calcul, nous devrons invoquer une formule nouvelle que nous chercherons tout d'abord.

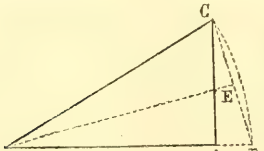


Fig. III. Soit tracé avec l'hypothénuse BC du triangle ABC pour rayon un arc de cercle rencontrant en D le prolongement du côté BA ; tirons CD et BE perpendiculaire à cette ligne ; BE sera la bissectrice de l'angle B.

Comme B D $=$BC$=a$, et que $c=a\cos$ B, il s'ensuit :

$$\text{A D}=a-a\cos \text{B}=a(1-\cos \text{B}).$$

D'ailleurs dans le triangle ACD :

AD$=$ CD $\sin\frac{1}{2}$B, puisque les angles ACD et EBD sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires entre eux. Ou bien

$$\text{AD}=2\text{ED}.\ \sin\frac{1}{2}\text{B}.$$

Enfin le triangle BED nous donne

$$\text{ED}=\text{BD}\sin\frac{1}{2}\text{B}=a\sin\frac{1}{2}\text{B}\ ;\ \text{d'où}$$

$$\text{AD}=2a.\sin^2\frac{1}{2}\text{B}.$$

Comparant à la 1re valeur de AD et divisant par a.

$$1-\cos \text{B}=2\sin^2\frac{1}{2}\text{B}.$$

Ou $$\cos \text{B}=1-2\sin^2\frac{1}{2}\text{B}.$$

$$1+\cos\text{B}=2-2\sin^2\frac{1}{2}\text{B}=2(1-\sin^2\frac{1}{2}\text{B})=2\cos^2\frac{1}{2}\text{B},\ \text{par 8}).$$

Nous pouvons donc écrire les deux formules :

(14)
$$1-\cos\text{B}=2\sin^2\frac{1}{2}\text{B}.$$
$$1+\cos\text{B}=2\cos^2\frac{1}{2}\text{B}.$$

Reste à faire voir qu'elles sont vraies également dans le cas de l'angle obtus.

En nous rappelant les remarques 9) et 11 bis) et faisant B′$=180°-$B$=\pi-$B ; d'où $\frac{\text{B}'}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\text{B}}{2}$, nous verrons que :

$$1+\cos B'=1-\cos B\,;\ \cos\frac{1}{2}B'=\sin\frac{1}{2}B.$$

$$1-\cos B'=1+\cos B\ ;\ \sin\frac{1}{2}B'=\cos\frac{1}{2}B.$$

et les valeurs substituées dans les formules 14) rendent identiquement les mêmes formules pour le cas de l'angle obtus B', c. q. f. d.

Ceci posé, nous savons par la géométrie que : le carré d'un côté quelconque d'un triangle est à la somme des carrés des deux autres moins ou plus le double produit d'un de ces côtés par la projection du 2^{d} sur le premier : moins si l'angle opposé au côté cherché est aigu, plus s'il est obtus.

Ce théorème, énoncé algébriquement, s'écrira :

Pour ABC (fig. 1.) $b^2=a^2+c^2-2ct=a^2+c^2-2ca\cos B$, ou
pour A'BC : $b'^2=a'^2+c'^2+2c't=a'^2+c'^2+2c'a'\cos B$
$=a'^2+c'^2-2c'a'\cos B'$, en vertu de 11 *bis*) de sorte qu'en général, quelque soit l'angle B, nous aurons la formule :

$$(15)\qquad \begin{aligned} b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B.\\ a^2&=c+b^2-2bc\cos A.\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

De même

De la 1re de ces formules nous déduisons :

$$\text{Cos B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

à laquelle nous allons appliquer la transformation annoncée par les formules 14).

$$1+\cos B=1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2ac}=$$

$$\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=\left\{\frac{(a+c)+b}{2ac}\right\}\left\{\frac{(a+c)-b}{2ac}\right\}$$

$$1-\cos B=1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=1+\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}=\frac{2ac+b^2-a^2-c^2}{2ac}$$

$$= \frac{b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)}{2ac} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac} =$$

$$\frac{\{b + (a-c)\}\{b - (a-c)\}}{2ac} = \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2ac}.$$

Posant pour plus de simplicité :

$$a + b + c = 2p. \text{ d'où } a + b - c = 2p - 2c = 2(p-c)$$

$$a - b + c = 2(p-b)\ ;\ b + c - a = 2(p-a),$$

Il en résultera les transformations :

$$1 + \cos B = \frac{2p.\,2(p-b)}{2ac}.\quad 1 - \cos B = \frac{2(p-c)\,2(p-a)}{2ac}$$

et par les formules 14), en supprimant les facteurs 2 :

$$(15)\text{ bis} : \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} B = \frac{p(p-b)}{ac}.\quad \sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{(p-a)(p-c)}{ac}$$

$$\text{De même } \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{p(p-a)}{bc}.\quad \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

$$\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} C = \frac{p(p-c)}{ab}.\quad \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} C = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

Divisant membre à membre et par couple, et se rappelant que

par 6): $$tg \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} B}, \text{ etc.},$$

on trouve :

$$tg^2 \frac{1}{2} B = \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}, \text{ etc.}$$

Extrayant enfin la racine carrée des 2 membres : (*)

$$tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

(16)
$$tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$g\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Une dernière formule qui est souvent d'une grande utilité est celle de l'aire du triangle exprimée au moyen des quantités données.

Quel qu'il soit, son aire T (fig. 1) est donnée par

Pour ABC : $T=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}cb\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

Pour A'BC : $T'=\frac{1}{2}c'h=\frac{1}{2}c'b'\sin A'=\frac{1}{2}c'a'\sin B=$

$$\frac{1}{2}c'a'\sin B'$$

par la remarque 10 bis.

De même on trouverait :

$$T=\frac{1}{2}ab\sin C.\quad T'=\frac{1}{2}a'b'\sin C'.$$

En général donc :

(17) $T=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$, ou :

(*) Comme chacun des angles A, B, C est $<\pi$, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ seront $<\frac{\pi}{2}$; les premiers membres sont donc toujours positifs ; les seconds par suite aussi.

l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés adjacents par le sinus de l'angle compris.

Pour arriver à une expression indépendante des angles, multiplions entre elles les formules (14) :

$$(1+\cos B)\ (1-\cos B) = 4\sin^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}B\ ;\ \text{ou :}$$

$$1-\cos^2 B = 4\sin^2\frac{1}{2}B\ \cos^2\frac{1}{2}B\ ;\ \text{ou par 5)}$$

$$\sin^2 B = 4\sin^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}B\ ;$$

Extrayant la racine carrée des deux membres : (*)

$$\text{Sin } B = 2\sin\frac{1}{2}B\ \cos\frac{1}{2}B.$$

Et si l'on substitue cette valeur dans 17) on a :

$$T = \frac{1}{2}ac \times 2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B = ac\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B$$

Par 15 bis) : $$T = ac\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

ou enfin :

18) $$T = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)},$$

expression donnée généralement dans les traités de géométrie.

C'est au moyen des formules que nous venons d'établir, et spécialement de 10), 11), 12), 15) et 16) que nous allons résoudre un triangle dans les quatre cas suivants :

1er cas. On donne deux angles et un côté a.

On connaît donc les trois angles A, B, C ; et les côtés b et c seront donnés par 10)

(*) Comme sin B, $\sin\frac{1}{2}B$ et $\cos\frac{1}{2}B$ sont positifs quel que soit B, il n'y a pas lieu à employer le double signe.

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}. \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

L'aire par 17) $\quad T = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$

2e cas. On donne deux côtés a et b et l'angle compris C. De la connaissance de C l'on déduit celle de :

$$A + B = \pi - C, \text{ et de } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Soit $a > b$. Par 15) : $tg\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} tg\frac{A+B}{2}$.

Cette formule donnera $\frac{1}{2}(A-B)$, et comme $\frac{A+B}{2}$ est déjà connu, on aura A et B.

Quant au 3e côté c il se calculera par

12) $$c = (a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}; \text{ ou par}$$

11) $c = a\cos B + b\cos A$, formule moins avantageuse, et l'aire par 17)

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C. \ (*)$$

3me Cas. On donne deux côtés a et b et un angle A opposé à l'un d'eux.

(*) Si l'on voulait n'employer dans le calcul de l'aire que les quantités dont on s'est déjà servi précédemment, on ferait usage de la formule suivante, que nous donnons sans la démontrer parce qu'elle sort de notre cadre, mais qu'un lecteur un peu exercé trouvera aisément :

$$T = \frac{(a+b)(a-b)}{4}\left\{ \sin^2\frac{A+B}{2} \operatorname{cotg}\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{A+B}{2} tg\frac{A-B}{2} \right\}$$

Par 1 : $$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

ce qui fait connaître l'angle B et par suite C.

Le troisième côté se trouvera par :

10) $$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$ ou par :

11) $$c = a \cos B + b \cos A.$$

La 1re de ces formules est préférable sous le rapport de la rapidité du calcul.

L'aire est donnée par 17) : $T = \frac{1}{2} ab \sin C.$

Ce cas présente une discussion analogue à celle du même problème en géométrie.

1° Si $b \sin A > a$, on aura $\sin B > 1$, ce qui est absurde par 5) ; et le problème est impossible.

2° Si $b \sin A = a$, on voit aisément par 1) que le triangle sera rectangle et que son hypothénuse est b, c'est-à-dire que l'angle B est droit. — De là résulte $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; et par 5) $\cos \frac{\pi}{2} = o$.

3° Si $b \sin A < a$, on pourra tout aussi bien prendre pour l'angle B l'angle obtus que nous appellerons B′ que l'angle aigu ; mais pour que cet angle B′ convienne comme B lui-même, il faut que l'angle B soit $> A$; alors en effet $B' = \pi - B < \pi - A$; donc $A + B' < \pi$, ce qui permet l'existence de l'angle C.

Or, $B > A$ exige aussi que $b > a$; donc, si l'on a en même temps

$$b \sin A < a \text{ et } b > a,$$

les angles B et B′ conviennent tous les deux ; d'où deux angles $C = \pi - (A+B)$ · $C' = \pi - (A+B') = \pi - (A + \pi - B) = B - A$, et par suite deux côtés C et C′ ; c'est-à-dire deux triangles différents mais renfermant les mêmes données a, b et A. Si au contraire, tandis que $b \sin A < a$ l'on a $b < a$, la seconde valeur B′ ne peut pas convenir ; car alors :

$B < a \cdot B' = \pi - B > \pi - A$; d'où $A + B' > \pi$, ce qui ne peut convenir à aucun triangle. (*)

4me Cas. On donne les trois côtés a, b, c.

Les trois angles sont fournis par les formules 16) :

$$tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

et l'aire par la formule 18)

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous bornons ici notre précis de trigonométrie ; les questions que nous avons résolues sont en effet les seules qui se rencontrent généralement dans les applications.

Le lecteur qui possède bien ces 18 formules comprendra du reste aisément celles que donnent les auteurs dans les problèmes plus spéciaux que nous n'avons pas examinés.

Après avoir exposé la disposition des tables, nous en montrerons les usages dans la résolution numérique des triangles.

Des logarithmes en général.

Nous appellerons avec Serret (**) logarithme d'un nombre un autre nombre calculé de telle sorte que :

Le logarithme du produit de deux nombres soit égal à la somme des logarithmes de ces deux nombres.

(*) Nous ne nous occupons pas du cas où $b > a$ et $A = 90°$ parce qu'il rentre dans celui du triangle rectangle.

(**) Voir ses Eléments d'Arithmétique.

Ainsi, si a et b désignent deux nombres, l.a et l.b leurs logarithmes, on a par définition :

$$\text{l.}\,(a\cdot b)=\text{l.}a+\text{l.}b.$$

De là résulte tout d'abord : 1° Que le logarithme de 1 est 0 ; car faisant $b=1$:

$$\text{l.}(a\times 1)=\text{l.}a+\text{l.}1\ ;\ \text{d'où}\ \text{l.}1=0.$$

2° Que le logarithme de l'inverse d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre pris en signe contraire.

Car si nous faisons $b=\frac{1}{a}$; d'où $a\cdot b=1$, la formule capitale devient :

$$\text{l.}1=\text{l.}a+\text{l.}\frac{1}{a}\ ;\ \text{et comme l.}1=0 :\ \text{l.}a+\text{l.}\frac{1}{a}=0\ ;$$

$$\text{d'où l.}\frac{1}{a}=-\text{l.}a.$$

3° Que le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes des deux termes.

$$\text{Car l.}\frac{a}{b}=\text{l.}\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\text{l.}a+\text{l.}\frac{1}{b}=\text{l.}a-\text{l.}b.$$

4° Que le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.

Car l. $(abcd\ldots)=$ l. $(abc\times d\ldots)=$ l.$abc+$ l.$d=$ l. $(ab\times c)+$ l.$d=$ l.$(ab)+$ l.$c+$l.$d=$ l.$a+$ l.$b+$ l.$c+$ l.d, etc.

D'où résulte comme corollaire :

$$\text{l.}\frac{a.b.c\ldots}{m.n.p\ldots}=\text{l.}\,a+\text{l.}\,b+\text{l.}\,c+-(\text{l.}\,m+\text{l.}\,n+\text{l.}\,p+\cdots)$$

5° Que le logarithme de la puissance n^{me} d'un nombre est égal à n fois le logarithme de ce nombre.

Car $a^n=a.a.a.\ \ldots.$ répété n fois.

D'où l. $(a^n)=$ l. $a+$ l. $a+$l. $a+\cdots$ répété n fois,

$$\text{l.}\,(a^n)=n\times\ \text{l.}\,a.$$

6° Que le logarithme de la racine n^{me} d'un nombre est égal à $\frac{1}{n}$ fois le logarithme de ce nombre. Car faisant $a^n=b$, d'où $a=\sqrt[n]{b}$, la formule précédente devient :

$$\text{l. } b=n\times\text{l.}\sqrt[n]{b}\text{ ; d'où l.}\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\times\text{ l. } b.$$

REMARQUE GÉNÉRALE. On voit par ce qui précède que l'on peut trouver le logarithme d'une expression qui ne renferme que des produits, quotients, puissances et racines, sans aucun signe plus ou moins, au moyen des logarithmes de tous les nombres qui entrent dans l'expression.

$$\text{Ex. l.}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}\times\sqrt[5]{\frac{f}{e}}}{\sqrt[2]{\frac{a^3b}{c^3}}\times\sqrt[4]{\frac{f}{e^3}}}\right)=$$

$$\text{l.}\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}+\text{l.}\sqrt[5]{\frac{f}{e}}-\text{l.}\sqrt[2]{\frac{a^3b}{c^3}}-\text{l.}\sqrt[4]{\frac{f}{e^3}}=$$

$$\frac{1}{3}\text{l.}\frac{a^2b}{c}+\frac{1}{5}\text{l.}\frac{f}{e}-\frac{1}{2}\text{l.}\frac{a^3b}{c^3}-\frac{1}{4}\text{l.}\frac{f}{e^3}=$$

$$\frac{1}{3}(\text{l. } a^2+\text{l. } b-\text{l. } c)+\frac{1}{5}(\text{l. } f-\text{l. } e)-\frac{1}{2}(\text{l. } a^3+\text{ l. } b-\text{l. } c^3)$$

$$-\frac{1}{4}(\text{l. } f-\text{l. } e^3)=$$

$$\frac{1}{3}(2\text{l. } a+\text{l. } b-\text{l. } c)+\frac{1}{5}(\text{l. } f-\text{l. } e)-\frac{1}{2}(3\text{ l. } a+\text{l. } b-3\text{ l. } c)$$

$$-\frac{1}{4}(\text{l. } f-3\text{ l. } e).$$

Mais dès que l'expression renferme le signe + ou −, elle n'est plus *calculable par logarithmes;* ainsi on ne peut pas trouver le logarithme de $a+b$, si l'on ne connaît que ceux de a et de b; de même de $a-b$; ainsi encore on ne peut pas trouver l. $\sqrt{a^2+b^2}$, connaissant l. a et l. b ; tandis que, en mettant a^2-b^2 sous la forme $(a+b)(a-b) = s.d$, pour abréger ; $(a+b=s,\ a-b=d)$; on aura l. $\sqrt{a^2-b^2}=$ l. $\sqrt{s.d} = \frac{1}{2}$ (l. $s+$ l. d) ; mais on voit qu'il faut connaître directement l. $s=$ l. $(a+b)$ et l. $d=$ l. $(a-b)$, et qu'il ne sert à rien de connaître l. a et l. b.

Ces exemples suffiront pour faire comprendre toutes les applications.

Construction des tables des logarithmes des nombres naturels.

Pour faire comprendre la possibilité de la construction d'une table renfermant les logarithmes de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000 par exemple, table qui permettra de calculer les logarithmes des fractions au moyen des règles exposées plus haut, nous allons montrer qu'en prenant un nombre arbitraire pour logarithme d'un premier nombre tout-à-fait quelconque pourvu qu'il ne soit pas 1, il nous sera possible de calculer les logarithmes de tous les autres.

Faisons donc arbitrairement l. 10 $=1$;
d'où résulte déjà l. $100=2$, l. $1000=3$, l. $10000=4$.

Ainsi que l. $0{,}1=-1$; l. $0{,}01=-2$; l. $0{,}001=-3$, etc.

Posons maintenant 10 égal à une puissance considérable de t ; ainsi $10=t^n$, et choisissons n de sorte qu'il soit égal à une puissance de 2 ; soit $n=2^{16}$; t qui est $\sqrt[n]{10}=1{,}000035$ pourra donc à la rigueur se calculer par l'extraction successive de 16 racines carrées, c'est-à-dire en extrayant : 1° la racine de 10 ; 2° la racine de celle-ci; 3° la racine de cette seconde, et ainsi de suite.

Concevons actuellement qu'on forme toutes les puissances successives de t depuis la 2^{me} jusqu'à la $(n-1)^{me}$; t^n étant égal à 10, cette suite de puissances nous fournira une échelle de n nombres

compris entre 1 et 10 et différant entre eux de moins de 0,00035 de sorte que les nombres naturels 2, 3,....9 se trouveront dans cette échelle à moins de 0,00035 près.

Appliquons maintenant à ces nombres les propriétés des logarithmes ; puisque $t=\sqrt[n]{10}$ nous aurons :

$$\text{l. } t=\frac{1}{n}\text{ l. } 10=\frac{1}{n}\text{; par suite :}$$

$$\text{l. } t^2=2\text{l. } t=\frac{2}{n}\text{ ; l. } t^3=\frac{3}{n}\text{, et ainsi de suite ; et en nommant } t^{a_2} \text{ le}$$

nombre qui s'approche le plus de 2, t^{a_3} celui qui s'approche le plus de 3 etc., nous aurons à 0,00002 près :

$$\text{l. } 2=\text{l. } t^{a_2}=\frac{a_2}{n}\text{. l. } 3=\frac{a_3}{n}\cdots\cdot\text{ l. } 7=\frac{a_7}{n}\cdots\cdot$$

On conçoit de la même manière la possibilité de calculer les logarithmes des nombres compris entre 10 et 100, entre 100 et 1000, entre 1000 et 10000.

On comprend aussi qu'on peut atteindre ainsi telle approximation que l'on voudra, et obtenir par exemple 4, 5, 6, 7 décimales exactes ou davantage à chaque logarithme d'un nombre naturel.

Enfin il est aisé de voir que si l'on prenait toute l'échelle des nombres :

1; t; t^2; t^3;..... t^n et leurs logarithmes :
0; l. t; 2 l. t; 3 l. t;.. n l. t,

on pourrait choisir parmi ceux-ci des nombres qui ne diffèrent de 0,001 ; 0,002 ; 0,003 .... 0,010 ; 0,011 ; 0,012..... que d'une fraction aussi petite que l'on voudra ; et en prenant les nombres correspondants de la 1re suite, on aura avec autant de décimales exactes qu'on voudra, les nombres qui ont pour logarithmes

0,001 ; 0,002 ... 0,010 ; 0,011, ...,

0,100; 0,101; 0,102,....; 0,110; 0,200.... 0,300...., 0,900...., 0,999.

C'est cette dernière table, que nous appellerons table inverse de

logarithmes, dont nous devons l'idée à Struve ; nous en ferons voir les avantages en parlant de l'emploi des logarithmes.

Rem. Lorsqu'on jette un coup d'œil sur les tables, une remarque essentielle se présente immédiatement à l'esprit : c'est que si l'on considère une série de nombres successifs et leurs logarithmes, la différence entre l'un de ceux-ci et le suivant est sensiblement la même dans cette série ; d'où l'on conclut que les logarithmes croissent à peu près proportionnellement aux nombres ; et réciproquement dans la table inverse.

Nous ferons un très-grand usage de cette remarque.

Disposition et usage des tables des logarithmes des nombres naturels et des tables inverses.

Nous dirons d'abord un mot des petites tables à 5 et à 7 décimales ; la disposition en est très-primitive ; elle consiste à disposer tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000 dans des colonnes, et leurs logarithmes à côté d'eux dans une 2de colonne ; dans une 3^{me} enfin se trouvent les différences entre deux logarithmes consécutifs.

Ces tables renferment toutes deux une foule de chiffres superflus, comme nous le prouverons en parlant de la 2^{me} disposition : en premier lieu les pages qui renferment les nombres de 1 à 1000 ; (mais ce mal n'en serait plus un avec une meilleure disposition) ; en second lieu les caractéristiques, toujours inutiles, et les premières décimales qui le sont souvent et qui ôtent à la table la netteté nécessaire.

Ces défauts toutefois sont peu importants dans la table à 5 décimales de J. de Lalande ; mais ce que nous ne pouvons concevoir, c'est qu'un calculateur, qui aurait dû être un tant soit peu familier avec les logarithmes, se soit avisé de publier ces tables étendues, comme le dit le titre, à 7 décimales, c'est-à-dire de transcrire, en employant une disposition déplorable, les excellentes tables de Callet (*) ; ce qui nous semble aussi impardonnable, c'est qu'on se

(*) On voudra bien nous pardonner ces réflexions faites dans l'intérêt de tous ceux qui se servent du calcul ; nous les justifierons en quelques mots.

En effet, pourquoi 7 décimales ? Evidemment pour obtenir une approximation plus grande.

serve souvent de ces *tables étendues à 7 décimales* dans les établissements moyens.

Comparons donc sous ce rapport les tables de Lalande aux *tables étendues*, puis aux tables de Callet.

Soit par exemple à multiplier

$$3130{,}83 \times 3430{,}74 = n.$$

l. 3130 = 3.4955443 ; d = 1388. 3.49554 ; d = 14.

l. 3430 = 3.5352941 ; d = 1266. 3.53529 ; d = 13.

Pour calculer les logarithmes des nombres proposés, personne n'aura le courage, pour ne pas dire la naïveté de multiplier 1388 par 83 et 1266 par 74 ; autant et mieux vaudrait faire la multiplication directe des nombres donnés.

On multipliera donc 74×13 et 84×14 en forçant les chiffres, ce qui donne 962 et 1162 à ajouter respectivement aux deux logarithmes à 7 décimales.

Pour ceux à 5 on se bornera à 7×13 et 8×14 ce qui donne 9 et 11 à ajouter, mais les deux résultats étant trop faibles chacun, on ajoutera 9 à l'un et 12 à l'autre, ce qui donnera :

l. 3130.83	:	3.4956605	3.49566
l. 3430.74	:	3.5353903	3.53538
l. n		7.0310508	7.03104

Cherchons n. On trouve :

l. 1074 : 3.0310043.d = 4042. 3.031000.d = 40.

différences calculées : 508 (3.0310043 − 3.0309535) ; 465 (4042 − 3577) ; 4 (3.031000 − 3.030960) ; 4 (40 − 36).

à 1074 il faut donc ajouter $\frac{465}{4042} = 0{,}125$,

division encore compliquée ; tandis que, d'après les tables à 5 décimales, il faut ajouter $\frac{4}{40} = 0.1$.

Les tables à 7 décimales donnent donc le produit :

10741250 puisque la caractéristique est 7.

Celles à 5 donnent 10741000.

Par les tables de Callet on trouve

l. 3130,8 = 3.4956553. Les parties proportionnelles donnent : + 42 donc :

l. 3130.83 3.4956595

Nous ne parlerons pas de la disposition des tables de Callet qui se reproduit du reste presque identiquement dans celles de Struve.

Dans toutes les deux on supprime la caractéristique, c'est-à-dire le chiffre placé avant la virgule dans le logarithme d'un nombre ; en effet les logarithmes de 8,64 ; 86,4 ; 864 ; 8640..... ont tous pour partie décimale 9365 et pour caractéristiques respectives 0, 1, 2, 3, etc., puisque chacun est 10 fois plus grand que le précédent ; il en sera de même, comme nous verrons, des fractions 0,864 ; 0,0864 ; etc. dont les logarithmes ont aussi pour partie décimale 9365.

Dans toutes les deux encore les nombres sont disposés en deux colonnes, l'une verticale, l'autre horizontale ; celle-ci ne porte que les chiffres 0,1,...9, que l'on doit supposer écrits à la suite du nombre placé dans la table verticale ; cette réunion forme le nombre

l. 3430,7	=3.5353827	
	+ 51	
l. 3430,74	=3.5353878	Ajoutant :
l. n	=7.0310473	Ensuite :
l. 10741	. . , . 47	
différence :	26.	

Les parties proportionnelles donnent :

pour	24,24 . . .	0.06	
	1,62	0.003	
	0.16	0.0003	
pour	26.02	0.0633	; de sorte que

n = 10741063,5 Calculé directement :
n = 10741063,7142.
.....0,4142

La différence entre le nombre exact et le nombre calculé par les tables de Callet est donc de 0,4142 ou de 4 unités sur le 9me chiffre.

Les tables à 7 décimales produisent au contraire une erreur de 186, ou de près de 2 unités sur le 6me chiffre.

Celles de Lalande enfin une erreur de 63, ou de 0,6 sur le 6me chiffre.

Ces résultats sont concluants.

Et c'est pour arriver à une erreur 3 fois plus grande que celle que produisent les petites tables de Lalande, où toutes les différences se calculent de tête, que l'on va employer ces *tables étendues à 7 décimales* qui conduisent à des calculs souvent plus longs que l'opération directe ! Vraiment, on a peine à le croire !

Proscrivons donc l'usage de ces dernières tables. Servons-nous de celles de Lalande quand nous n'aurons besoin que de 5 chiffres exacts ; et dans les cas qui exigent une exactitude plus grande, employons les tables de Callet.

dont le logarithme se trouve, comme dans la table de Pythagore, à l'intersection des lignes horizontale et verticale conduites par chacune des deux parties du nombre.

C'est ainsi qu'on trouvera le log. de :

8	à l'inters. des lignes menées par	80	et 0	: 9031
806	. . . . .	80	et 6	: 9063
86	. . . . .	86	et 0	: 9345
864	. . . . .	86	et 4	: 9365

La caractéristique du 1er sera 0, du 3^{me} 1, du 2^{d} et du 4^{me} 2.

Quant aux tables inverses, la disposition en est la même, si ce n'est que les deux colonnes qui renfermaient le nombre renferment cette fois le logarithme, et que le nombre correspondant à ce logarithme se trouve ici à l'intersection des deux lignes menées par les chiffres dont la réunion forme ce logarithme.

Veut-on savoir p. ex. quel est le nombre qui a pour log.

005,	il se trouve à l'inters. des lignes menées par	00	et 5	: 1012
050,	. . . . .	05	et 0	: 1122
500,	. . . . .	50	et 0	: 3162
540,	. . . . .	54	et 0	: 3467
547,	. . . . .	54	et 7	: 3524

La caractéristique manque naturellement dans les logarithmes précédents ; et c'est d'après elle, quand elle sera donnée, qu'on placera la virgule ou les zéros nécessaires dans les nombres correspondants. Mais si l'on a un nombre de plus de 3 chiffres, ou un logarithme qui en ait davantage après la caractéristique, comment trouver le logarithme du 1er, le nombre correspondant au 2^{d} ?

1^{r} Ex. Trouvez le log. de 3,1416.

La table donne : l.3,14=0.4969;d=14.

En vertu de la remarque (R) nous aurons donc pour 0,16 une différence $0{,}16 \times 14 = 2{,}2$; d'où : $l.\pi = l.3{,}1416 = 0.49712$, qui n'est en défaut que de 3 unités sur le dernier chiffre.

2^{me} Ex. Trouvez le nombre qui a pour log. 0.49715.

La table donne pour le nombre correspondant à

497 : 3141 d=7.

En vertu de la remarque (R), pour 0,15 nous aurons la diffé-

rence : $0,15\times7=1,0$ à ajouter à 3141 ce qui donne le nombre 3,1420, vu que la caractéristique est 0.

Ce nombre n'est en excès que de 4 unités sur la 4me décimale ; il aurait dû être $\pi=3,1416$.

Voyons maintenant comment on trouve le log. d'une fraction proprement dite, et commençons par les fractions décimales.

Nous avons déjà vu que tous les nombres entiers ou fractionnaires composés des mêmes chiffres, tels que :

$$8640\ ;\ 864;\ 86,4;\ 8,64;$$

ont la même partie décimale 9365 à leurs logarithmes, et pour caractéristiques respectives

$$3\ ,\quad 2,\quad 1,\quad 0\quad .$$

Or : $0,864=\frac{8,64}{10}$; $0,0864=\frac{8.64}{100}$; $0,00864=\frac{8.64}{1000}$

donc : $1.0,864=0.9365-\ 1.10=0.9365-1$

$1.0,0864=0.9365-\ 1.100=0.9365-2$

$1.0,00864=0.9365-1.1000=0,9365-3$, etc.

Pour éviter des nombres négatifs, nous ajouterons 10 à tous ces logarithmes et nous écrirons :

$1.0,864=9,9365$; $1.0,0864=8,9365$; $1.0,00864=7,9365$; etc.

Ces logarithmes sont à la vérité trop forts de 10 ; d'où résulte que les nombres correspondants sont devenus 10,000,000,000 (nombre dont le logarithme est 10) ou 10 milliards de fois trop grands ; et comme une semblable erreur s'apercevrait à l'instant même dans le résultat, il est inutile de s'en préoccuper.

Quand donc la caractéristique d'un logarithme sera

4 le nombre correspondant aura pour plus hautes unités des dizaines de mille ;
3 . . . . . unités de mille ;
2 . . . . . centaines ;
1 . . . . . dizaines ;
0 . . . . . unités simples ;

9 . . . . . dizièmes ;
8 . . . . . centièmes ;
7 . . . . . millièmes, etc.

à moins qu'on n'opère sur des nombres tout-à-fait considérables, auquel cas la caractéristique

7 indiquerait des dizaines de millions ;
6 . . . . . millions ;
5 . . . . . centaines de mille, etc.

Nous procédons de la même manière dans le calcul des logarithmes des fractions proprement dites.

Ex. $$l.\frac{2}{3} = l.2 - l.3 = 0.3010 - 0,4771.$$

Comme cette quantité serait négative, nous écrirons :

$$l.\frac{2}{3} = 0.3010 + 10 - 0.4771 = 0.3010 + 9.5229 = 9.8239,$$

résultat qu'on sait être trop fort de 10.

Or soustraire un logarithme de 10, s'appelle prendre le complément de ce logarithme ; et cette opération se fait comme on voit en ôtant de 10 le dernier chiffre significatif, et de 9 tous les chiffres placés à sa gauche ; chaque fois donc qu'on aura à retrancher un logarithme d'un autre, on ajoutera à celui-ci le complément du premier ; *et remarquez qu'on ne doit pas pour cela écrire le complément, mais le logarithme lui-même; et lire de tête son complément, opération excessivement simple et qui ne demande que très-peu d'habitude.*

Ex. $$l.\frac{2}{3} = \begin{cases} 1.2 = 0.3010 \\ -1.3 = 0.4771 - \end{cases}$$

$$l.\frac{2}{3} = 9.8239$$

On lit 9 et 0 donne 9
2 et 1 donne 3
2 et 0 donne 2

5 et 3 donne 8
9 et 0 donne 9

Ex. Calculer : $x = \sqrt{\frac{97{,}4 \times 511{,}4}{1461{,}1 \times 852{,}5}}$

$$\text{l}.x = \frac{1}{2}\left\{\text{l}.97{,}4 + \text{l}.511{,}4 - \text{l}.1461{,}1 - \text{l}.852{,}5\right\}$$

l. 97,4=1.9886
l. 511,4=2.70876
l.1461,1=3.16472—
l. 852,5=2.93055—

18.60209

l.x=9.301045.

On indique par un signe les deux logarithmes dont on doit prendre le complément et l'on dit :

5 et 8, 13 et 6, 19.
1 et 4, 5 et 2, 7 et 7, 14 et 6, 20.
2 et 9, 11 et 3, 16 et 8, 24 et 8, 32.
3 et 6, 9 et 3, 12 et 8, 20.
2 et 8, 10 et 7, 17 et 9, 26.
2 et 7, 9 et 6, 15 et 2, 17 et 1, 18 ;

prenant la moitié du résultat, on obtient

l.x =9.301045, évidemment trop fort de 10.

d'où x=0,2002 au moyen de la table inverse.

Nous n'avons plus qu'une remarque à faire relativement à l'emploi des compléments ; c'est qu'on doit toujours veiller à ce que le résultat final, s'il est trop fort, le soit au moins de 10, (ou de 20) ; si dans l'exemple précédent on n'avait eu qu'un chiffre au dénominateur, la somme aurait été trop forte de 10 seulement, et dans ce cas il aurait fallu l'augmenter encore de 10 pour qu'en prenant la moitié, le résultat final fût trop fort, non de 5, mais de 10 ;

ainsi encore, si au lieu d'une racine carrée dans l'exemple même on avait eu une racine cubique ou quatrième, la somme n'étant trop forte que de 20, il aurait fallu l'augmenter, dans le 1er cas, de 10, dans le 2d de 20, afin que le résultat final fût trop fort de 10.

Nous aurons l'occasion d'appliquer tous ces principes dans les exemples numériques que nous proposerons sur la résolution des triangles.

Construction d'une table de logarithmes des sinus et tangentes des angles. (*)

Par les relations connues 5), 6), 7) et 19), on voit qu'il n'est nécessaire que de calculer directement les sinus des angles de 0° à 45°; car les sinus donnent les cosinus par (5), et ces deux-ci fournissent les tangentes et cotangentes par 6) et 7).

Quant aux angles compris entre 45° et 90°, il est superflu de s'en occuper, puisque :

$$(19)\quad \begin{cases} \sin(45°+a)=\cos(45°-a), & \cos(45°+a)=\sin(45°-a), \\ \operatorname{tg}(45°+a)=\operatorname{cotg}(45°-a). \end{cases}$$

Soit proposé de trouver les valeurs des sinus de minute en minute de 0° à 45°.

Partageons l'arc de 90° en un nombre de parties égales supérieures à 2700 ; chaque division a sera plus petite que 2 minutes, et l'on pourra calculer les cordes des arcs a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc. jusqu'à 90° ; tous ces arcs différeront entre eux de a, c'est-à-dire de moins de 2 minutes.

Fig. IV.

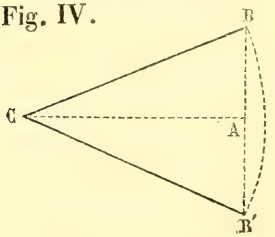


Fig. IV. Or, si nous considérons une corde quelconque BB′ et son apothème CA, nous aurons deux triangles dans chacun desquels $\sin B = \frac{c}{a}$; et comme l'angle B est la moitié de l'angle BCB′, le côté c la moitié de la corde et le côté a le rayon du cercle qu'on peut faire égal à l'unité, il s'ensuit que :

(*) Il suffit évidemment que nous établissions ici la possibilité de la construction d'une pareille table.

Le sinus d'un angle est la moitié de la corde qui sous-tend un angle double dans un cercle de rayon=1.

En prenant les moitiés des cordes précédemment calculées, nous aurons donc les sinus des angles $\frac{1}{2}a$, a, $\frac{3}{2}a$, $2a$, $\frac{5}{2}a$. . . , c'est-à-dire d'angles qui croissent à peine de minute en minute.

On aurait pu obtenir des intervalles plus petits, et par suite les sinus d'angles aussi approchants que l'on voudrait de 1′, 2′, 3′, 4′, etc.

Des sinus on déduit les cosinus et l'on prend ensuite les logarithmes des valeurs numériques obtenues ; comme ce sont toutes fractions, on leur donne pour caractéristiques 6, 7, 8, 9 ; enfin on a :

l. tg = l. sin — l. cos ; si la caractéristique est <10 on la laissera ; si elle est égale ou plus forte, on supprimera la dizaine qui est de trop.

Disposition de ces tables.

Nous ne nous occuperons plus de la disposition des petites tables, qui ne présente aucune particularité sur celle des logarithmes des nombres.

Toutes les tables au reste, quelle qu'en soit la disposition, ont ceci de commun qu'elles ne vont que jusqu'à 45° en vertu des formules (19) ; mais comme par ces mêmes formules les sin., cos., et tg. de $45° + a$ sont les mêmes que les cos., sin., et cotg. de $45° - a$, et vice-versa, on a imaginé une disposition qui permet de lire tous les arcs depuis 0° jusqu'à 90° : nous la développerons pour les tables nouvelles que nous publions aujourd'hui.

En haut de la page se lisent :

Log. sin., Log. tg., Log. cos., et au-dessus de chaque colonne :

0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′.

Au bas de la page :

Log. cos., Log. cotang., Log. cos., et en-dessous de chaque colonne :

60′, 50′, 40′, 30′, 20′, 10′.

A gauche on lit tous les nombres de degrés de 0° à 45°, à droite de 44° à 89°.

Les nombres de droite répondent aux noms et aux chiffres supérieurs, ceux de gauche aux inférieurs.

Dans les dernières colonnes, la plupart des logarithmes n'ont que deux chiffres : c'est quand les deux précédents sont les mêmes que ceux du logarithme supérieur dans la même colonne.

Nous avons supprimé partout la caractéristique parce qu'elle est constamment 9, sauf les exceptions suivantes dans les log. des sin. et tang., exceptions que l'on ne rencontrera du reste presque jamais dans la pratique, à cause de la petitesse des angles auxquels elles sont relatives.

Les logarithmes des sinus et des tangentes de

$$0°10',\ 0°20',\ 0°30' \text{ ont pour caractéristique } 7 ;$$

Ceux des sinus et des tangentes des arcs compris entre 0°30', et 5°30' ont pour caractéristique 8.

Nous avons eu soin de placer un astérisque devant les logarithmes des sinus et tangente de 5°30' pour indiquer au lecteur le point précis où commence la caractéristique 9 ; les précédentes sont donc 8, sauf les trois premières qui sont 7, et qui ne se présenteront certainement jamais dans un calcul.

Enfin la dernière ligne des log. tang. a 0 pour caractéristique.

Quelques exemples vont éclaircir ce qui précède.

Trouvez l. sin 32°40'.

On cherche 32° à gauche ; 40' au-dessus dans les colonnes des log. sin. ; à l'intersection des colonnes horizontale et verticale se trouve 7322 ;

Donc l. sin 32°40' = 9,7322.

Trouvez l. cos 32°40'.

On cherche 32° à gauche ; 40' au-dessus dans les colonnes des log. cos ; et l'on trouve à l'intersection le nombre 9252 ; donc :

$$\text{l. cos } 32°40' = 9,9252.$$

De même on trouvera :

$$\text{l. tg. } 32°40' = 9,8070.$$

Quant à l. cotg 52°40′, comme on sait que :

$$\text{Cotg } a = \frac{1}{\text{tg} a}, \text{ d'où l. cotg } a = -\text{ l. tg } a, \text{ on aura :}$$

$$\text{l. cotg } 52°40' = -\text{ l. tg } 52°40' = -9{,}8070,$$

et l'on se servira du complément sans l'écrire toutefois.

Trouvez l. sin 78°20′ ; l. cos 78°20′ ; l. cotg 78°20′ ; l. tg 78°20′.

On cherchera dans chaque cas 78° à droite, 20′ en-dessous dans les colonnes respectives, et l'on trouvera :

L. sin 78°20′ = 9,9909 quoique la table ne donne que 09 ; mais les deux chiffres supérieurs dans la même colonne sont 99 et l'on sait que la caractéristique est toujours 9.

$$\text{l. cos } 78°20' = 9{,}3058.$$

$$\text{l. cotg } 78°20' = 9{,}3149.$$

Quant à l. tg 78°20′, comme $\text{tg } a = \frac{1}{\text{cotg} a'}$ on aura : l. tg 78°20′ = −9,3149, dont on se servira en employant son complément. (*)

Trouvez l. sin 60°.

Comme 0′ ne se trouve pas en-dessous, il faudra chercher l. sin 59°60′ = 9,9375.

Il nous reste encore à exposer la disposition que nous avons donnée aux tables inverses.

Ici nous avons éprouvé des difficultés sérieuses ; il était impossible en effet de supprimer la caractéristique, et en voulant faire rentrer dans notre table tous les logarithmes des sinus et tangentes depuis la caractéristique 7 jusqu'à la caractéristique 0, nous étions obligé à dresser une multitude de tables, et nous n'atteignions plus notre but.

Force nous a donc été de nous borner aux logarithmes des sinus et tangentes qui ont 9 pour caractéristique ; et cette restriction ne présente aucun inconvénient dans la pratique, puisqu'elle ne laisse de côté que les angles inférieurs à 5°50′, comme nous l'avons déjà montré.

(*) On doit bien retenir que l. tg $(45° + a) = -\text{l. cotg}(45° + a)$.
et que l. cotg $(45° - a) = -\text{l. tg } (45° - a)$.

S'il arrivait que l'on rencontrât un logarithme correspondant à un angle aussi petit, il faudrait chercher cet angle dans la table directe.

La table inverse est divisée en deux parties, celle de gauche pour les sinus, celle de droite pour les tangentes. Chacune d'elles renferme 10 colonnes verticales comme dans la table inverse des logarithmes des nombres naturels de Struve ; à gauche, comme dans cette même table, figurent les deux premiers chiffres du logarithme donné, le 3^{me} étant inscrit au-dessus de chaque colonne.

Enfin, les chiffres inscrits dans les colonnes indiquant des minutes et secondes, tandis que le nombre de degrés correspondant se lit également à gauche, sur la même ligne horizontale. Les minutes sont données par les deux premiers chiffres, et le troisième indique des dizaines de secondes ; il eût été inutile de pousser jusqu'aux secondes simples, et cette prétendue exactitude n'eût du reste été qu'illusoire ; nous nous sommes donc arrêté aux dizaines de secondes, et nous avons partout supprimé le dernier zéro, ce qui nous a permis de restreindre les dimensions de la table.

Afin du reste d'éviter toute erreur, les chiffres qui indiquent les minutes et celui qui donne les dizaines de secondes sont en caractères différents.

Il peut arriver toutefois que le nombre de degrés soit plus considérable que celui qui se trouve sur la même ligne horizontale : dans ce cas, un signe (*) placé au-dessus du nombre de minutes et secondes indiquera qu'il faut augmenter le chiffre des degrés d'une unité ; deux signes (**), qu'il faut l'augmenter de deux unités.

Quand, d'une ligne à la suivante, le nombre de degrés varie davantage, comme, dans la table des sinus, au-delà de 65°, nous avons inscrit deux nombres de degrés sur la même ligne horizontale, l'un à gauche, l'autre à droite.

Pour les premiers nombres de la colonne (sans signe (*)) le nombre correspondant de degrés est celui même qui est inscrit à gauche ; pour ceux qui suivent avec un (*) ou deux signes (**), on augmentera ce nombre d'un ou deux degrés ; pour ceux qui viennent après sans signe (*), on lira le nombre de degrés placé à droite ; enfin on lira un ou deux degrés de plus que le nombre pour ceux que l'on trouvera encore à la suite des autres avec un (*) ou deux signes (**).

Pour la ligne horizontale inférieure, cette disposition même de-

venant trop compliquée, nous avons placé en-dessous de chaque nombre de minutes et de secondes, le nombre de degrés correspondant.

Hâtons-nous de donner quelques exemples de tous les cas qui peuvent se présenter.

Soit l.sinA=9,004.

On cherche 00 à gauche, 4 au-dessus, et l'on trouve à l'intersection des lignes qui passent par ces chiffres : 473 ; à gauche se lit 5° : donc A=5°47′30″.

Soit l.sinA=9,287.

A l'intersection des lignes menées par 28 et 7 on trouve *10o et à gauche 10° ; à cause du signe (*) on prend 11° ;

Donc A=11°10′0″.

Si l'on donne pour l.sinA les valeurs suivantes :

9,983 · 9,985 · 9,988 · 9,989 · 9,992,

les angles A correspondants seront :

74°4′20″. 75°1′40″. 76°35′30″. 77°9′30″. 79°2′10″.

Lorsque l'on aura un log.cosin., on cherchera l'angle correspondant comme si c'était un log.sin., et l'on en prendra le complément.

Soit l.cosA=9,985= l.sinA′ ; A′=74°4′20″. A=15°55′40″.

Quand un log.tang. a pour caractéristique 9, la recherche de l'angle ne représente aucune difficulté ; en voici deux exemples :

Soit l.tgA=9,800. A=32°15′0″.

=9,895. A=38°0′40″.

Si la caractéristique est 0, on procède comme suit :

Soit l.tgA=0,107 ; on en conclut : l.cotgA=9,985,

et l'on est ramené au cas suivant.

Quand on donne un log cotg. avec la caractéristique 9, on cherche l'angle comme si c'était un log.tang. et l'on en prend le complément.

Soit l.cotgA=9,983=l.tgA'. A'=38°0'40''. A=51°59'20''.

Si la caractéristique est 0, le procédé est plus simple :

Soit l.cotg.A=0,107 ; d'où l.tgA=9,893. A=38°0'40''.

Nous ne nous arrêterons pas ici à donner des exemples de l'emploi des différences qui est fort aisé, et qui se présentera naturellement dans la résolution numérique des triangles.

N.-B. La disposition la mieux appropriée à l'emploi de ces tables consiste à les coller dos à dos sur une feuille de carton. C'est dans cette vue que nous avons placé une partie de la table inverse des lignes trigonométriques à la suite de la table directe, de manière que les deux feuilles dont se composent ces tables soient de même dimension.

Résolution numérique des triangles. (*)

Triangles rectangles. 1er Cas. $a=589.25$. B=67°25'. (**)

Formules : $b=a\sin B$. $c=a\cos B$.

$$l.b=l.a+l.\sin B.\quad l.c=l.a+l.\cos B.$$

$$\begin{array}{r} l.a=2.77030 \\ l.\cos B=9.58500 \\ l.\sin B=9.96525 \\ \hline l.c=2.35530 \cdot\ c=226.65 \\ l.b=2.73555 \cdot\ b=545.96 \end{array}$$

2me Cas. $b=545.96$. B=67°25'.

Formules : $c=b\cot gB$. $a=\dfrac{b}{\sin B}$.

(*) Nos exemples sont ceux de Serret, bornés à l'approximation que comportent nos tables. On voudra bien comparer nos types de calcul, sous le rapport de la simplicité, à ceux de cet auteur qui est à nos yeux le plus recommandable.

Nous sommes bien convaincu qu'il connaît beaucoup mieux que nous les artifices que nous employons ; mais nous aurions voulu les voir exposés dans son excellent traité de trigonométrie.

(**) Exemple traité par Serret :

$a=5892,51$. B=67°22'48'',48
$b=5439,24$.

$\text{l}.c = \text{l}.b + \text{l.cotgB}$. $\text{l}.a = \text{l}.b - \text{l.sinB}$.

$\text{l}.b = 2.75557$	recherché de nouveau directement.
$\text{l.sinB} = 9{,}96525$	
$\text{l.cotgB} = 9.61962$	
$\text{l}.c = 2.35519$	$c = 226{,}59$.
$\text{l}.a = 2.77032$	$a = 589{,}32$.

En comparant ces chiffres aux précédents, on voit que l'accumulation des erreurs ne va guère au-delà d'une demi-unité sur le 4$^{\text{me}}$ chiffre, résultat auquel on n'aurait peut-être pas osé s'attendre.

3$^{\text{me}}$ Cas. $a = 589.25$ · $b = 554.96$.

Formules : $\text{sinB} = \frac{b}{a}$ · $c = a\text{cosB}$.

$\text{l.sinB} = \text{l}.b - \text{l}.a$. $\text{l}.c = \text{l}.a + \text{l.cosB}$.

$\text{l}.b = 2{,}75557$	
$\text{l}.a = 2{,}77030-$	
$\text{l.sinB} = 9.96527$	$\text{B} = 67°23'28''$.
$\text{l.cosB} = 9.38490$	d'où ajoutant l.a :
$\text{l}.c = 2.3552$	$c = 226.60$.

4$^{\text{me}}$ Cas $b = 543{,}96$ $c = 226.60$.

Formules : $\text{tgB} = \frac{b}{c}$ · $a = \frac{b}{\text{sinB}}$.

$\text{l.tgB} = \text{l}.b - \text{l}.c$ $\text{l}.a = \text{l}.b - \text{l.sinB}$.

$\text{l}.b = 2.75557$	
$\text{l}.c = 2{,}35554-$	recherché directement.
$\text{l.tg B} = 0.38003$;	$\text{l.tgB}' = 9.61997$. $\text{B}' = 22°57'$. $\text{B} = 67°25'$.
$\text{l.sinB} = 9.96525-$	aj$^{\text{t}}$. l.b :
$\text{l}.a = 2.77032$.	$a = 589.25$.

Certes, on ne peut pas exiger plus d'exactitude.

Triangles quelconques. 1^er^ cas. A=81°47′. B=38°15′. a=701,22.

Donc $A+B=120°$. $C=60°$.

Formules : $b=a\frac{\sin B}{\sin A}$. $c=a\frac{\sin C}{\sin A}$. $2T=bc\sin A$.

$l.b=l.a+l.\sin B-l.\sin A$; $l.c=l.a+l.\sin C-l.\sin A$.

$l.2T=l.b+l.c+l.\sin A$.

$l.a=2.84585$
$l.\sin B=9.79148$
$l.\sin C=9.9375$.
$l.\sin A=9.99554-$

$l.b=2.64176$. $b=438.26$.
$l.c=2.78778$ $c=615.49$.

Ajoutant avec l.sinA :

$l.2T=5.42508$. $2T=266148,6$. $T=153074,5$.

2^me^ Cas. $a=424,1$. $b=371,09$. $C=21°47′$.

d'où : $\frac{C}{2}=10°53′,5$. $\frac{A+B}{2}=79°6′,5$.

Formules : $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$.

$$c=(a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$l.\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=l.(a-b)-l.(a+b)+l.\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$l.c=l.(a+b)+l.\cos\frac{A+B}{2}-l.\cos\frac{A-B}{2}$$

(*) Exemple traité par Serret :

$A=81°47′12″,5$. $B=38°12′47″,5$. $C=60°$.
$a=7012,24$.
$b=4582,65$. $c=6135,71$.

$a-b=55{,}01 \quad a+b=795{,}18.$

$$\begin{aligned}
\text{l.}(a-b) &= 1.72458 \\
\text{l.}(a+b) &= 2.90049- \quad * \\
\text{l.tg}\frac{A+B}{2} &= 9.28428- \\
\text{l.cos}\frac{A+B}{2} &= 9.27651 \quad *
\end{aligned}$$

$$\text{l.tg}\frac{A-B}{2} = 9.53961 \qquad \frac{A-B}{2} = 19°6',25$$

$$\text{l.cos}\frac{A-B}{2} = 9.97559- \qquad \begin{aligned} A &= 98°12',75 \\ B &= 60°\ 0',25 \end{aligned}$$

$$\text{l.}c = 2.20141 \qquad c = 159{,}02.$$

Nous indiquerons seulement la manière de calculer l'aire du triangle par la formule :

$$T = \frac{(a+b)(a-b)}{4}\left\{ \sin^2\frac{A+B}{2}\ \text{cotg}\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{A+B}{2}\ \text{tg}\frac{A-B}{2} \right\}$$

Outre les logarithmes précédents il faut encore chercher

$\text{l.sin}\dfrac{A+B}{2}$. Posant alors : $T=T'-T''$ on aura :

$$\text{l.}T'' = \text{l.}(a+b) + \text{l.}(a-b) + 2\ \text{l.sin}\frac{A+B}{2} + \text{l.cotg}\frac{A-B}{2} - \text{l.}4.$$

$$\text{l.}T'' = \text{l.}(a+b) + \text{l.}(a-b) + 2\ \text{l.cos}\frac{A+B}{2} + \text{l.tg}\frac{A-B}{2} - \text{l.}4.$$

Si l'on voulait effectuer le calcul, il faudrait avoir soin d'écrire les nouveaux logarithmes nécessaires en-dessous des précédents, afin de n'écrire inutilement aucun chiffre.

3me Cas. $a=219{,}91$. $b=251{,}35$. $A=27°47'\frac{5}{4}$ (*)

Formules : $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$. $c=a\frac{\sin C}{\sin A}$. $2T=ab\sin C$.

$\text{l.sin}B=\text{l.}b-\text{l.}a+\text{l.sin}A$, $\text{l.}c=\text{l.}a-\text{l.sin}A+\text{l.sin}C$.

$\text{l.}2T=\text{l.}a+\text{l.}b+\text{l.sin}C$.

$\text{l.}b=2.40026$	
$\text{l.}a=2{,}34222-$	
$\text{l.sin}A=9.66866$	$A=27°47''45''$.
$\text{l.sin}B=9.72670$.	$B_1=32°12'20''$. $B_2=147°47'40''$. d'où
$\text{l.sin}C_1=9.95750$.	$A+B_1=60°0'5''$.
$\text{l.sin}C_2=8.88563$	$C_1=120°$(moins $5''$ que nous devons négliger).
$\text{l.}c_1=2.61106$	$C_2=B_1-A=4°24'55''$.
$\text{l.}c_2=1.55919$	$c_2=485.6$ $c_1=56{,}257$.
$\text{l.}2T_1=4.67998$	$2T_1=47857{,}8$. $2T_2=4247.1$.
$\text{l.}2T_2=3.62811$	$T_1=23928{,}9$ $T_2=2123{,}55$.

Les quantités B_1, C_1, c_1, et T_1 répondent à la 1re solution ;

B_2, C_2, c_2 et T_2 à la 2de.

4me Cas. $a=608.8$; $b=1365.7$; $c=949.7$. (**)

Formules : $tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$

(*) Exemple traité par Serret :

$A=27°47'44'',77$. $a=2199{,}12$. $b=2513{,}28$

1re Solution. $B=32°12'25'',23$. $C=120°0'0''$. $c=4084{,}08$.

2e Solution. $B=147°47'44'',77$. $C=4°24'30'',46$. $C=362{,}495$.

(**) Exemple traité par Serret (1re édition).

$a=608{,}775$. $b=1363{,}656$. $c=949{,}689$.

$\frac{1}{2}A=11°18'35''.75$. $\frac{1}{2}B=60°15'18'',40$. $\frac{1}{2}C=18°26'5'',85$.

$$tg\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$l.tg\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[l.(p-b)+l.(p-c)-l.(p-a)-l.p].$$

$$l.tg\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-c)-l.(p-b)-l.p].$$

$$l.tg\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-b)-l.(p-c)-l.p].$$

$$l.T=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-b)+l.(p-c)+l.p].$$

On trouve : $a+b+c=2p=2922,2$; d'où :

$p=1461,1$. $p-a=852,3$. $p-b=97,4$. $p-c=511.4$.

$l.p=3.16472$— Nous ne mettons de signe — qu'au premier de ces logarithmes, parce que seul il est toujours négatif excepté dans le calcul de l'aire.

$l.(p-a)=2.93055$

$l.(p-b)=1.98860$

$l.(p-c)=2.70376$

$2l.tg\frac{1}{2}A=18.60209$

$2l.tg\frac{1}{2}B$ 20,48599

$2l.tg\frac{1}{2}C=19,04567$

$2l.T=10,79263$

$l.tg\frac{1}{2}A=9.301045$. $\frac{1}{2}A=11°19'10''$

$l.tg\frac{1}{2}B=0.242995$. $\frac{1}{2}B=60°15'10''$ (par $\frac{1}{2}B'=29°44'50''$)

$l.tg\frac{1}{2}C=9.522855$. $\frac{1}{2}C=18°25'55''$

$l.T=5.396315$ $\frac{1}{2}(A+B+C)=90°0'15''$; 15″ d'erreur totale ;

$T=249089.$ 30″ sur les trois angles du triangle.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de rappeler ici les principes qui nous servent constamment de règle dans tous les calculs logarithmiques, et dont un lecteur attentif aura déjà vu l'application dans tous les exemples que nous avons traités.

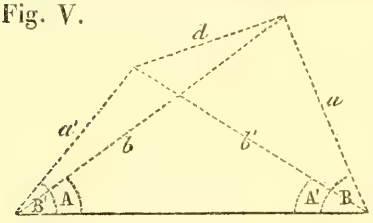
Le premier de ces principes est *de ne jamais écrire un logarithme qu'une seule fois, quel que soit le nombre des quantités qu'il sert à déterminer.*

Le second, sans lequel le premier serait souvent inapplicable, consiste à *toujours écrire le logarithme lui-même, et jamais son complément, n'eût-on même besoin que de celui-ci.* Outre les avantages déjà énumérés, cette méthode procure celui de pouvoir écrire beaucoup plus vite le logarithme et le vérifier bien plus aisément.

Nous mentionnerons encore un artifice bien connu des calculateurs et destiné à appliquer le premier principe dans le cas où l'on a un grand nombre d'observations faites toutes dans un même but ; cet artifice peut être utile dans la topographie, quoique ses applications les plus fréquentes se rencontrent dans l'astronomie et la géodésie.

Supposons, pour fixer les idées par un exemple simple, qu'une base étant *exactement* connue, on veuille trouver la distance de deux points visibles des deux extrémités de cette base.

Fig. V.



On pourra mesurer (fig. V) les angles A, A', B, B', et répéter l'observation 20 fois. (*)

Pour déterminer la distance cherchée au moyen de ces observations, on commencera par calculer les cotés a, b, a', b', au moyen des formules connues :

$$a = c\frac{\sin A}{\sin(A+B)} \cdot \quad b = c\frac{\sin B}{\sin(A+B)} \cdot$$

$$a' = c\frac{\sin A'}{\sin(A'+B')} \cdot \quad b' = c\frac{\sin B'}{\sin(A'+B')} \cdot$$

(*) On pourra, si on le préfère, supposer qu'on veuille, au moyen de la base AB et des angles que l'on mesurera, déterminer 20 distances différentes entre des points visibles de ses deux extrémités ; la disposition du calcul restera identiquement la même.

On voit que le côté c se reproduit quatre fois pour chaque observation, donc en tout 80 fois ; il faut cependant n'écrire qu'une fois son logarithme ; pour cela on l'écrira tout au bas d'une feuille volante, et on le fera glisser successivement aux 80 places qu'il doit occuper.

De même, il ne faut écrire qu'une fois pour chaque observation $\sin(A+B)$ et $\sin(A'+B')$.

Voici donc le type du calcul dans lequel nous représentons par des points les logarithmes à écrire, tandis que le 1^{r} se trouve sur une feuille volante.

	1re Obs.	2me Obs.	3me Obs.	4me Obs.	
l.c					
l.sin(A+B)	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
l.sinA	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	etc.
l.sinB	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
l.a	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
l.b	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	

On obtient de même l.a' et l.b'.

Actuellement la distance d peut se déterminer à la fois dans deux triangles différents dont on connaît deux côtés et l'angle compris, ce qui fournira une vérification.

Le troisième principe est *de ne jamais rendre une formule calculable par logarithmes au moyen de l'introduction d'une quantité auxiliaire, lorsque cette quantité n'est pas utile à connaître dans la suite du calcul.*

Ainsi quand on voudra se servir de la formule : $c=a\cos B+b\cos A$, au lieu de chercher à la rendre calculable par logarithmes en posant :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=n, \text{ d'où l.}n \text{ et :}$$

$$c=n(\sin A\cos B+\sin B\cos B)= n\sin(A+B),$$

ce qui force à chercher trois logarithmes, savoir :

$$\text{l.}a,\ \text{l.sin A}\ \text{ et l.sin}(A+B),$$

on conçoit que si l'on a obtenu d'avance ou si l'on doit employer plus tard l.cosA et l.cosB, il sera plus simple de calculer séparément les deux nombres $a\text{cosB}$ et $b\text{cosA}$ et d'en faire la somme.

De même si l'on veut déterminer l'angle A donné par

$$\text{tgA} = \frac{a\text{sinB}}{1+a\text{cosB}},$$

nous montrerons à l'évidence que le procédé le plus simple pour rendre cette formule *calculable par logarithmes* est toujours plus long et moins exact que le procédé direct.

Recherchons d'abord les formules les plus simples de transformation, et pour cela distinguons deux cas, $a<1$, $a>1$.

1° $a<1$. On pourra poser $a\text{cosB}=\text{cos C}$; d'où :

$$\text{l.cosC} = \text{l.}a + \text{l.cosB}\ ;\ \text{ce qui donne l'angle C,}$$

mais entaché d'une erreur inévitable.

Ensuite, comme $1+\text{cosC} = 2\text{cos}^2\frac{1}{2}\text{C}$, on aura :

$$\text{l.tgA} = \text{l.}a + \text{l.sinB} - \text{l.}2 - 2\,\text{l.}\cos\frac{1}{2}\text{C}\ ;$$

on doit donc chercher $\frac{1}{2}$C, puis $\cos\frac{1}{2}$C et le doubler, enfin l.2;

en tout donc 5 logarithmes à chercher pour obtenir l.tg.A, outre que l'un d'eux est à doubler ; et de plus, l'on emploie un angle fautif C.

2° $a>1$. On fera : $\text{tgA} = \dfrac{\text{sinB}}{\frac{1}{a}+\text{cosB}}$ et l'on posera $\frac{1}{a} = \text{cosC}$;

$\text{l.cosC} = -\text{l.}a$; ce qui donne l'angle C, fautif comme précédemment ;

puis, comme : $\text{cosC}+\text{cosB} = 2\cos\frac{\text{C}+\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}-\text{B}}{2}$, il faudra chercher

$\frac{C+B}{2}, \frac{C-B}{2}$, l.cos$\frac{C+B}{2}$, l.cos $\frac{C-B}{2}$, et l.2, pour obtenir :

$$\text{l.tgA} = \text{l.sinB} - \text{l.2} - \text{l.cos}\frac{C+B}{2} - \text{l.cos}\frac{C-B}{2}.$$

Comme dans le 1^{r} cas, un angle fautif, 5 logarithmes à chercher, et en outre calculer $\frac{C+B}{2}, \frac{C-B}{2}$.

Dans le procédé direct au contraire, on commence par chercher par logarithmes le nombre $1+a\cos B$, quel que soit a ; ce nombre sera entaché d'erreur, mais entre le calcul d'un nombre et celui d'un angle, avec toute l'exactitude dont chacun est susceptible, il n'y a pas à hésiter ; le premier est de beaucoup le plus simple ; on peut même, pensons-nous, affirmer en général que l'erreur sera moins considérable ; sous ce rapport donc, l'avantage reste déjà au procédé direct.

Achevons le calcul ; on cherchera le logarithme du nombre $1+a\cos B$, logarithme plus aisé à trouver encore que celui d'un sinus ou cosinus, et l'on aura :

$$\text{l.tgA} = \text{l.}a + \text{l.sinB} - \text{l.}(1+a\cos B).$$

Type du calcul :

l.sinB

l.cosB

l.a

l.$a$cosB ;

l.$(1+a\cos B)$

l.tgA.

d'où : $\left\{ \begin{array}{l} a\cos B. \\ 1+a\cos B. \end{array} \right.$

En tout donc 4 logarithmes à chercher ; aucune opération intermédiaire à effectuer, car ajouter une unité à un nombre ne peut pas s'appeler une opération ; enfin pas d'angle auxiliaire à déterminer.

La supériorité de ce procédé est donc hors de doute ; et remarquez que nous avons cependant omis de parler de la difficulté que présente quelquefois la transformation analytique d'une expression que l'on veut rendre *calculable par logarithmes*.

Cette transformation n'est réellement avantageuse que dans le cas où elle n'exigerait pas l'emploi de logarithmes nouveaux dont le procédé direct aurait besoin.

Un des exemples les plus remarquables de ce cas se rencontre précisément dans le problème que nous venons de traiter et dont la fin de la solution n'a été qu'indiquée parce que notre intention était d'y revenir dans cette discussion.

Le lecteur se rappelle que le calcul de la distance de deux points inaccessibles s'est trouvé ramené à la détermination du 3me côté d'un triangle dont on connaît l'angle opposé et les deux autres côtés ; mais ces deux côtés sont donnés par leurs logarithmes, et pour employer la solution ordinaire, il faudrait chercher les nombres correspondants (cause d'erreur) a et b, puis les logarithmes de $a+b$ et $a-b$ (nouvelle cause d'erreur). Pour éviter ce passage du logarithme au nombre, Gauss a rendu l'expression $\frac{a-b}{a+b}$ calculable par logarithmes en la remplaçant par $\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$ et posant $\frac{b}{a}=\text{tg}.p$, ce qui donne $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\text{tg}.p}{1+\text{tg}.p}=\text{tg}(45°-p)$.

Or, $\text{l.tg}.p = \text{l}.b - \text{l}.a$. de sorte qu'il est inutile de chercher les nombres a et b.

En reprenant la formule connue :

$$\text{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\text{tg}\frac{A+B}{2}=\text{tg}(45° - p)\text{tg}\frac{A+B}{2},$$ on pourra déterminer tous les angles du triangle et par suite la distance cherchée.

Nous croyons inutile de donner le type du calcul ; et nous nous serions bien gardé d'entrer dans ces détails, si notre but n'était de réconcilier avec le calcul par logarithmes ceux qui en redoutent les complications imaginaires.

Le lecteur habitué à se servir des petites tables à 7 décimales et à obtenir une approximation à peine supérieure à celles que fournissent les nôtres, à moins d'effectuer, pour les différences, des calculs réellement rebutants, s'étonnera sans doute de l'exactitude des résultats que nous venons d'obtenir.

Et cependant, nous pouvons hautement affirmer que nous avons opéré consciencieusement, sans jamais forcer la décimale dans un sens qui eût pu nous être favorable, comme le lecteur s'en convaincra du reste s'il veut prendre la peine de vérifier nos calculs.

Il eût été trop long de les publier en entier, et c'eût été même donner une fausse idée de la manière dont ils doivent s'effectuer : car en général, dans l'emploi de nos tables, les différences peuvent et doivent être calculées de tête ; et nous pouvons assurer, par notre propre expérience, que ce procédé n'exige pas une longue habitude.

Les détails numériques dans lesquels nous sommes entré auront suffi, nous l'espérons, pour convaincre le lecteur des immenses avantages que procurent ces tables, avantages que nous pouvons résumer en ces trois points.

Exactitude suffisante des résultats. (*)

Simplicité et brièveté des opérations.

Enfin, n'avoir à manier que deux feuilles de papier sur lesquelles se lisent immédiatement le logarithme et le nombre, au lieu de devoir feuilleter une à une les pages d'un volume, et de perdre à cette opération fastidieuse près de la moitié du temps nécessaire pour arriver au résultat !

Si l'on compare enfin ces tables à la règle à calcul, qu'on a raison d'introduire dans l'enseignement parce qu'elle ne pourrait être remplacée sur le terrain, il est hors de doute que celle-ci conduit moins rapidement au résultat, le donne d'une manière moins exacte, et surtout est beaucoup plus restreinte dans ses applications.

Nous osons donc espérer que tous ceux qui ont à cœur la diffusion des méthodes simples et expéditives de calcul s'efforceront de propager l'emploi de ces tables, et nous nous estimerons heureux

(*) A peine $\frac{1}{2}$ unité d'erreur sur le 4me chiffre dans les nombres et $\frac{1}{2}$ minute sur les angles, dans le résultat final.

d'avoir pu contribuer à cette œuvre en les publiant ; mais le mérite des services qu'elles rendront doit revenir tout entier à leur véritable inventeur, au plus grand des astronomes contemporains. (*)

(*) A la suite de ses *tables de logarithmes a cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques*, *Paris*, *Gauthier-Villars*, Monsienr Houël a donné des tables à quatre décimales analogues à celles de Struve, mais sans citer l'auteur de cette disposition ; peut-être n'a-t-il pas eu connaissance de ces dernières qui ne sont du reste répandues que dans les observatoires de la Russie et de l'Allemagne. Comme elles sont de beaucoup antérieures à celles de M. Houël, c'est en faveur de Struve que nous revendiquons la priorité de l'idée, jusqu'à preuve du contraire.

Quant à l'extension de cette même idée aux tables des logarithmes des lignes trigonométriques nous ne pensons pas qu'elle ait été réalisée jusqu'aujourd'hui.

VI. — *Des surfaces réglées et des surfaces enveloppes.*

PAR

LE DOCTEUR G. STAMMER,

PROFESSEUR A DUSSELDORF.

1. *Toute ligne droite qui se trouve sur une surface quelconque, est contenue dans chaque plan qui est tangent à la surface dans un point de la droite.*

Cette proposition peut se vérifier de la manière suivante : Si nous prenons pour origine des coordonnées un point de la droite, les équations en seront

$$x = mz\ ,\quad y = nz.$$

Par conséquent l'équation de la surface qui contient cette droite pourra s'écrire sous la forme

$$A(x - mz) + B(y - nz) = 0\ ,$$

où A et B sont des fonctions des coordonnées. Le plan qui touche la surface à l'origine des coordonnées aura pour équation

$$ax + by - (am + bn)z = 0,$$

(*) Dans une lettre privée adressée à M. Noël, professeur émérite à l'Université de Liége, M. Stammer fait connaître le but qu'il s'est proposé d'atteindre dans le présent Mémoire. Ne pouvant s'habituer à la méthode infinitésimale, dit l'auteur, il a tâché de parvenir aux équations différentielles des surfaces réglées et des surfaces enveloppes par une voie indépendante de cette méthode.

où a et b sont les termes de A et B dépourvus de x, y, z. Comme cette équation est satisfaite en faisant

$$x = mz, \quad y = nz,$$

elle prouve le théorème proposé.

Il s'ensuit que :

1° Le plan tangent à une surface réglée en un point quelconque, contient toutes les droites de la surface qui passent par ce point. Ces droites font donc partie de la ligne d'intersection du plan avec la surface.

2° Deux droites de la surface réglée qui se coupent, déterminent le plan tangent au point d'intersection.

Il faut toutefois excepter le cas où le point est un point singulier de la surface.

3. La ligne d'intersection de la surface avec le plan tangent au point x', y', z', se trouve en combinant l'équation de la surface $z' = f(x', y')$ avec l'équation de son plan tangent

$$z - z' = (x - x') \frac{df}{dx'} + (y - y') \frac{df}{dy'}. \quad (*)$$

En posant $x = x' + h$, $y = y' + k$ et en prenant h et k assez petits, on peut développer $f(x,y)$ d'après la série de Taylor. On a donc pour tous les points de la surface assez rapprochés du point x', y', z' :

$$z = z' + \Delta z' = z' + \frac{df}{dx'} h + \frac{df}{dy'} k + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx'^2} h^2 + \frac{d^2 f}{dx' dy'} hk$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dy'^2} k^2 + \cdots \quad (\mathrm{I})$$

En substituant dans cette équation pour z sa valeur tirée de l'équation du plan tangent, on obtient l'équation de la projection de la ligne d'intersection sur le plan des xy :

(*) Pour distinguer les différentielles complètes des différentielles partielles, nous désignerons les premières par la lettre d, et les dernières par ∂.

$$0=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx'^2}h^2+\cdot\ \cdot\ \cdot\right)+\frac{1}{5!}\left(\frac{d^5f}{dx'^5}h^5+\cdot\ \cdot\ \cdot\right)+\cdot\ \cdot$$

et en divisant par h^2,

$$\text{(II.)}\qquad 0=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2f}{dx'^2}+2\frac{d^2f}{dx'dy'}\frac{k}{h}+\frac{d^2f}{dy'^2}\left(\frac{k}{h}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{3!}h\left[\frac{d^3f}{dx'^3}+3\frac{d^3f}{dx'^2dy'}\frac{k}{h}+3\frac{d^3f}{dx'dy'^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2+\frac{d^3f}{dy'^3}\left(\frac{k}{h}\right)^3\right]+\cdot\cdot$$

Cette équation nous fournit la relation qui doit exister entre les quantités h et k pour que tous les points $x'+h$, $y'+k$ soient situés sur la ligne d'intersection. Or, le rapport $\frac{k}{h}=\frac{y-y'}{x-x'}$, n'étant autre chose que le coefficient angulaire de la droite qui joint le point x, y au point x', y', on voit que cette droite forme une partie de la ligne d'intersection, lorsque ce rapport est indépendant du point x, y c'est-à-dire de la quantité h.

Il faut donc que, pour les surfaces réglées, les coefficients de différentes puissances de h puissent s'évanouir séparément. Ces surfaces doivent donc satisfaire au système suivant d'équations (III

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{k}{h}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2=0,$$

. . . . . .

$$\frac{d^mf}{dx^m}+m\frac{d^mf}{dx^{m-1}dy}\frac{k}{h}+m_2\frac{d^mf}{dx^{m-2}dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)+\cdot\cdot\cdot=0,$$

. . . . . .

La valeur du rapport $\frac{k}{h}$, que nous désignerons pour plus de simplicité par λ, est fournie par la première équation ; les autre équations sont de condition. Or, la première équation fournit deux valeurs réelles, une seule ou deux valeurs imaginaires, suivant que

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2\gtrless\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\qquad\text{(IV)}$$

Nous voyons donc que la surface n'est pas réglée dès que $\frac{d^2f}{dxdy} < \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2}$. Il s'agit encore d'examiner si les autres équations sont vérifiées. Pour cela, supposons que les m—1 premières équations aient lieu et cherchons sous quelles conditions la $m^{ième}$ équation est alors vraie aussi. Si dans la $(m-1)^{ième}$ équation on met pour λ sa valeur tirée de la première équation on obtient une équation entre les coordonnées du point de contact. Mais comme la surface doit être réglée, il faut que par chacun de ses points on puisse mener des droites ; par conséquent les équations doivent subsister pour toutes les valeurs de x et de y ; et comme d'ailleurs ces variables sont indépendantes l'une de l'autre, il faut que les coefficients différentiels pris par rapport à x et y disparaissent séparément ; c.-à-d. (V).

$$\frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}} + m\,\frac{d^{m+1}f}{dx^m dy}\lambda + m_2\frac{d^{m+1}f}{dx^{m-1}dy^2}\lambda^2 + \quad . \quad . \quad + \frac{dF_m}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^{m+1}f}{dx^m dy} + m\,\frac{d^{m+1}f}{dx^{m-1}dy^2}\lambda + m_2\frac{d^{m+1}f}{dx^{m-2}dy^3}\lambda^2 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{dF_m}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{dy} = 0\ ;$$

où F_m représente le premier membre de la $(m-1)^{ième}$ équation.

En multipliant la seconde de ces équations par λ et l'ajoutant alors à la première, on obtient

$$\frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}} + (m+1)\frac{d^{m+1}f}{dx^m dy}\lambda + (m+1)_2\frac{d^{m+1}f}{dx^{m-1}dy^2}\lambda^2 +$$

$$(m+1)_3\frac{d^{m+1}f}{dx^{m-2}dy^3}\lambda^3 + \ . \ . \ . + \frac{dF_m}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda}{dy}\lambda\right) = 0. \quad \text{(VI)}$$

Si l'on compare cette équation à la $m^{ième}$ des équations (III), on voit que cette dernière est vérifiée dès que

$$\frac{dF_m}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\frac{d\lambda}{dy}\right) = 0,$$

c'est-à-dire dès que

$$\frac{dF_m}{d\lambda}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\lambda}{dx}+\lambda\frac{d\lambda}{dy}=0. \tag{VII}$$

3. Examinons d'abord la première de ces conditions ; on a :

$$\frac{dF_m}{d\lambda}=m\frac{d^m f}{dx^{m-1}dy}+2m_2\frac{d^m f}{dx^{m-2}dy^2}\lambda+$$

$$3m_3\frac{d^m f}{dx^{m-3}dy^3}\lambda^2+\ldots\ldots$$

$$=m\left[\frac{d^m f}{dx^{m-1}dy}+(m-1)\frac{d^m f}{dx^{m-2}dy^2}\lambda+(m-1)_2\frac{d^m f}{dx^{m-3}dy^3}\lambda^2+\ldots.\right]$$

$$=m\frac{dF_{m-1}}{dy}$$

Par conséquent la condition $\frac{dF_m}{d\lambda}=0$ est vérifiée en même temps que $\frac{dF_{m-1}}{dy}=0$; et l'on a $F_{m+1}=0$, lorsqu'en même temps $F_m=0$ et $\frac{dF_{m-1}}{dy}=0$.

Reprenons maintenant les équations (III). La première de ces équations fournit

$$\frac{dF_2}{d\lambda}=2\left(\frac{d^2f}{dxdy}+\lambda\frac{d^2f}{dy^2}\right);$$

il faut donc

$$\frac{d^2f}{dxdy}+\lambda\frac{d^2f}{dy^2}=0. \tag{VIII}$$

Si nous élevons cette équation au carré et que nous la comparions à l'équation $F_2=0$, nous trouvons

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}. \tag{IX}$$

Si cette équation est satisfaite, il en sera de même de l'équation

$$\frac{dF_2}{d\lambda}=0.$$

Il s'en suit

$$F_3=0.$$

Mais on a aussi

$$0=\frac{dF_2}{dy}=\frac{dF_2}{dy}+\frac{dF_2}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{dy};$$

et comme $\frac{dF_2}{d\lambda}=0$, il faut $\frac{dF_2}{dy}=0$, par conséquent $\frac{dF_3}{d\lambda}=0$, et $F_4=0$; et en général $F_n=0$.

Il est donc démontré que la surface est réglée lorsque l'équation

$$\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}.$$

est satisfaite par l'équation de la surface, ou bien, en remettant z pour $f(x,y)$, lorsque

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=\frac{dz}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} \qquad (X)$$

et la direction de la droite qui passe par le point x, y, z est fournie par l'équation

$$\frac{dz}{dx^2}+2\lambda\,\frac{d^2z}{dy}+\frac{d^2z}{dy^2}\lambda^2=0,$$

qui se réduit maintenant à

$$\frac{d^2z}{dy^2}\lambda+\frac{d^2z}{dxdy}=0,\ \text{ou}\ \lambda=-\frac{\dfrac{d^2z}{dxdy}}{\dfrac{d^2z}{dy^2}}=-\frac{\dfrac{d^2z}{d^2x}}{\dfrac{d^2z}{dxdy}}. \qquad (XI)$$

4. La seconde des deux conditions (VII) est satisfaite en même temps que la première. En effet, en différentiant la première des équations (XI) d'après x et d'après y, on obtient, en désignant par F le premier membre de cette équation,

$$0=\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\lambda\frac{d\mathrm{F}}{dy}=\frac{d^3z}{dx^2dy}+2\lambda\frac{d^3z}{dxdy^2}+\lambda^2\frac{d^3z}{dy^3}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda}{dy}\lambda\right)$$

$$=\frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\lambda\frac{d^2z}{dxdy}+\lambda^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{dy}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda}{dy}\lambda\right)$$

$$=\frac{d\mathrm{F}_2}{dy}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda}{dy}\lambda\right).$$

Mais nous avons déjà trouvé (3) que la condition (X) fait évanouir le terme $\frac{d\mathrm{F}_2}{dy}$; il faut donc

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda}{dy}\lambda=0,$$

ce qu'il fallait prouver.

En résumant ce que nous venons de trouver, nous voyons que la surface

$$z=f(x,y),$$

est réglée, lorsque

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda}{dy}\lambda=0,$$

où λ est la racine de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\lambda\frac{d^2z}{dxdy}+\lambda^2\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

5. Nous avons reconnu comme un cas spécial l'équation

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Dans ce cas les deux racines de l'équation précédente deviennent égales, c'est-à-dire que les deux droites, passant par le même point, coïncident. Tous les plans qui touchent la surface le long de cette droite, ont donc deux droites coïncidentes de commun ; par conséquent un seul et même plan touche la surface le long de chacune des droites déterminées par les équations précédentes. La surface est donc *développable*. Cette propriété peut aussi être démontrée directement.

En effet, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant les coefficients qui déterminent le plan tangent au point x,y, on trouve la valeur de ces coefficients pour le point $x'=x+h$, $y'=y+k$, en substituant ces valeurs et développant d'après le théorème de Taylor :

$$\frac{dz}{dx'} = \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}h + \frac{d^2z}{dxdy}k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^3}h^2 + 2\frac{d^3z}{dx^2dy}hk + \frac{d^3z}{dxdy^2}k^2\right) + \ldots$$

$$= \frac{dz}{dx} + h\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dxdy}\right] + \frac{1}{2}h^2\left[\frac{d^3z}{dx^3} + 2\frac{d^3z}{dx^2dy}\lambda + \frac{d^3z}{dxdy^2}\lambda^2\right] + \ldots$$

Il est alors facile de démontrer d'après ce qui précède, que les coefficients des différentes puissances de h deviennent égaux à zéro par la valeur particulière de λ ; et l'on a $\frac{dz}{dx'} = \frac{dz}{dx}$.

Et comme d'ailleurs les plans tangents en x,y et x',y' ont ces deux points de commun, ils coïncident entièrement.

6. Nous venons de démontrer que les surfaces développables sont représentées par l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} \qquad \text{(XII)}.$$

ou par son intégrale

$$\frac{dz}{dy}=\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où φ désigne une fonction quelconque.

Il reste donc pour les surfaces gauches les conditions

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\lambda+\frac{d^2z}{dy^2}\lambda^2=0,\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2>\frac{d^2z}{dx^2}\ \frac{d^2z}{dy^2},$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\frac{d\lambda}{dy}=0. \qquad \text{(XIII)}.$$

En substituant dans la dernière de ces équations les valeurs de λ et $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d\lambda}{dy}$, tirées de la première, on obtient une équation entre les différentielles troisièmes.

7. *Des surfaces enveloppes.* On entend par surface enveloppe la surface qui *touche* toutes les surfaces *d'une même famille* qui varient d'après une loi donnée. Les surfaces enveloppées sont données par la même équation qui fournit toutes ces surfaces lorsqu'on y fait varier une ou plusieurs constantes, appelées *paramètres*.

Supposons d'abord que l'équation des surfaces enveloppées ne contienne qu'un seul paramètre ; elle sera de la forme

$$Z=f(x, y, \alpha), \text{ ou } F(x, y, Z, \alpha)=0,$$

où α désigne le paramètre.

Si nous représentons par

$$z=\varphi(x, y)$$

l'équation demandée de la surface enveloppe, il faudra, d'après notre définition, pour chacun de ses points

$$Zz \quad , \frac{dZ}{dx}=\frac{dz}{dx}, \frac{dZ}{dy}=\frac{dz}{dy},$$

ou

$$\varphi(x, y)= f(x, y, \alpha), \frac{d\varphi}{dx}=\frac{df}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}=\frac{df}{dy}, \qquad \text{(XIV)}$$

puisque dans chacun de ses points elle touche une des surfaces enveloppées. Les deux dernières équations fournissent x et y en fonctions de α, ce qui était à prévoir en ce que dans chacun de ses points la surface enveloppe sera touchée par une autre des surfaces données.

En substituant ces valeurs dans la première des équations, elle prendra la forme

$$f(x_\alpha , y_\alpha , \alpha)=\varphi(x_\alpha, y_\alpha) ;$$

et comme elle doit subsister pour toutes les valeurs de α, il faut aussi

$$\frac{\mathrm{d}f(x_\alpha, y_\alpha, \alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}\varphi(x_\alpha, y_\alpha)}{\mathrm{d}\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{df}{d\alpha}=\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{d\alpha}.$$

Cette équation, comparée aux deux dernières équations, prouve que pour tous les points des surfaces enveloppées situés sur la surface enveloppe, il faut

$$\frac{df}{d\alpha}=0. \qquad \text{(XV).}$$

Comme cette équation exprime, pour chaque valeur particulière de α, une relation entre x et y, elle nous montre que chacune des

surfaces données touche la surface enveloppe le long d'une *ligne*, qui sera *courbe* en général.

8. Si l'équation des surfaces données est écrite sous la forme

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \qquad \text{(XVI)}.$$

nous obtiendrons encore tous les points de la surface cherchée en la combinant avec la condition trouvée.

Or, cette condition fournit y en fonction de x et de α, tandis que x reste indépendant de α. Il faut donc,

$$0=\frac{dF(x, y, z, \alpha)}{d\alpha}=\frac{dF}{d\alpha}+\frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{d\alpha}+$$

$$\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{d\alpha}$$

$$=\frac{dF}{d\alpha}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{d\alpha}+\left(\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dz}.$$

Or, la quantité entre parenthèses n'est autre chose que la différentielle complète de $F(x, y, z)=0$ qui doit être égale à zéro pour chaque valeur de α ; et comme, d'après le développement précédent,

$$\frac{dz}{d\alpha}=\frac{df}{d\alpha}=0,$$

il faudra

$$\frac{dF}{d\alpha}=0. \qquad \text{(XVII)}.$$

Cette condition, jointe à l'équation (XVI), fournit l'équation cherchée.

9. Si l'équation donnée contient deux paramètres, le raisonnement restera le même, et nous aurons

$$f(x, y, \alpha, \beta)=\varphi(x, y)\,;\ \frac{d\varphi}{dx}=\frac{df}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy}\ \ \frac{df}{dx}\cdot$$

$$\frac{df}{d\alpha}=0\ ;\ \frac{df}{d\beta}=0.$$

Chaque valeur de α et β fournit donc une valeur déterminée pour x et pour y ; d'où l'on tire que chaque surface enveloppée est touchée par la surface enveloppe en des *points déterminés*. On voit en même temps qu'il ne peut exister plus de *deux* paramètres variables, car, si nous en admettions un plus grand nombre nous aurions autant d'équations pour déterminer x et y ce qui conduirait à des absurdités.

En continuant le raisonnement, on trouve que la surface enveloppe s'obtient en éliminant α et β entre les 3 équations

$$F(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \frac{dF}{d\alpha}=0, \frac{dF}{d\beta}=0. \quad \text{(XVIII)}.$$

Il y a donc deux espèces différentes d'enveloppes, suivant que l'équation donnée contient un ou deux paramètres.

La surface qui enveloppe toutes les shpères du même rayon, dont les centres se trouvent sur le même *cercle*, appartient à la première espèce ; mais lorsqu'on prend toutes les sphères dont les centres se trouvent sur la même *sphère* on obtient une surface enveloppe de la seconde espèce.

10. Si l'équation donnée est du premier degré

$$z=ax+by+c,$$

où les constantes a, b, c contiennent le paramètre α, nous aurons

$$0=\frac{dz}{d\alpha}=x\frac{da}{d\alpha}+y\frac{db}{d\alpha}+\frac{dc}{d\alpha}. \qquad \text{(XIX)}.$$

Cette dernière équation fournit α en fonction de x et y ; après avoir substitué cette valeur de α dans l'équation du plan, il viendra

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=a+\left(x\frac{da}{d\alpha}+y\frac{db}{d\alpha}+\frac{dc}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dx}=a$$

$$\frac{dz}{dy}=b.$$

Si l'on élimine encore α entre les deux dernières équations, on obtient une équation de la forme

$$\frac{dz}{dy} = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

ou bien, comme dans l'équation de la surface enveloppe il n'entre plus la variable α,

$$\frac{dz}{dy} = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right). \qquad \text{(XXI)}.$$

C'est l'équation trouvée déjà plus haut (6) pour les surfaces développables. Il est donc prouvé en même temps que les surfaces développables sont des surfaces enveloppées par des plans dont l'équation ne contient qu'une seule constante arbitraire.

11. Toutes les autres surfaces sont donc touchées par des plans dont l'équation contient *deux* constantes arbitraires.

Pour trouver l'équation de la surface lorsque l'équation des plans tangents est donnée, soit cette dernière écrite sous la forme

$$ax+by+cz+1=0, \text{ où } a=\varphi_1(\alpha, \beta), \; b=\varphi_2(\alpha,\beta),$$

$$c=\varphi_3(\alpha, \beta). \qquad \text{(XXII)}.$$

Il faut alors (XXIII).

$$x\frac{da}{d\alpha}+y\frac{db}{d\alpha}+z\frac{dc}{d\alpha}=0, \; x\frac{da}{d\beta}+y\frac{db}{d\beta}+z\frac{dc}{d\beta}=0.$$

Mais en éliminant α et β entre les trois dernières des équations (XXII) on obtient une équation de la forme

$$\chi(a, b, c)=0,$$

et l'on peut maintenant considérer a et b comme les deux paramètres variables. Nous pouvons donc remplacer les équations (XXIII), par les équations

$$x+z\frac{dc}{da}=0, \quad y+z\frac{dc}{db}=0.$$

Mais l'équation $\chi(a, b, c)$ fournit

$$0=\frac{d\chi}{da}=\frac{d\chi}{da}+\frac{d\chi}{dc}\,\frac{dc}{da}$$

donc : $\dfrac{dc}{da}=-\dfrac{\dfrac{d\chi}{da}}{\dfrac{d\chi}{dc}}$; de même $\dfrac{dc}{db}=-\dfrac{\dfrac{d\chi}{db}}{\dfrac{d\chi}{dc}}$.

Par conséquent on obtient l'équation de la surface en éliminant a, b, c entre les équations

$$ax+by+cz+1=0,\ \chi(a, b, c)=0,\ x\frac{d\chi}{dc}=z\frac{d\chi}{da},\ y\frac{d\chi}{dc}=z\frac{d\chi}{db}.$$

Remarque. Nous venons de voir qu'il existe des surfaces touchées par des plans dont l'équation contient deux paramètres arbitraires. Un exemple de cette dernière espèce de surfaces courbes est la surface engendrée par un plan, pour lequel le produit de ses distances de deux points fixes est constant.

Soit $$ax+by+cz+1=0$$

l'équation du plan, et prenons les deux points fixes sur l'axe des x à distances égales ($+d$ et $-d$) de l'origine des coordonnées. Nous aurons les équations, (p^2 désignant la valeur constante du produit)

$$\chi(a, b, c)=p^2(a^2+b^2+c^2)-1+a^2d^2=0.$$

$$\frac{d\chi}{da}=2a(p^2+d^2),\ \frac{d\chi}{db}=2bp^2,\ \frac{d\chi}{dc}=2p^2c.$$

De là on trouve pour l'équation de la surface

$$[p^2x^2+(y^2+z^2)(p^2+d^2)]\,[(y^2+z^2)(p^2+d^2)+p^2(x^2-r^2-d^2)]=0,$$

ce qui exige

$$(y^2+z^2)(p^2+d^2)+p^2x^2=p^2(r^2+d^2).$$

La surface est donc un ellipsoïde de révolution dont l'axe de rotation est la ligne qui joint les deux points fixes.

L'équation peut aussi s'écrire

$$\frac{y^2+z^2}{p^2}+\frac{x^2}{r^2+d^2}=1.$$

12. *Arête de rebroussement.*

Nous avons trouvé (11) qu'on obtient une surface développable en éliminant le paramètre a entre le système des équations

$$ax+by+cz+1=0,\ x+y\frac{db}{da}+z\frac{dc}{da}=0. \quad \text{(XXIV)}.$$

En différentiant encore la dernière de ces équations, on obtient

$$y\frac{d^2b}{da^2}+z\frac{d^2c}{da^2}=0. \quad \text{(XXV)}.$$

La dernière équation représente encore un plan ; en éliminant a entre cette équation et la seconde des équations (XXIV), on obtiendra évidemment aussi une surface enveloppée par les plans représentés par l'équation $x+y\frac{db}{da}+z\frac{dc}{da}=0$.

Donc en éliminant a entre les trois équations on obtient un système de deux équations représentant une ligne courbe qui est située sur les deux surfaces développables. Cette ligne est nommée *arête de rebroussement*. Or, pour la même valeur de a le système des équations (XXIV) représente la droite d'intersection de deux plans, qui est située à la fois sur la surface développable et sur un de ses plans tangents ; cette droite est donc une *arête* de la surface. Ces mêmes plans sont tangents respectivement aux deux surfaces développables dont l'intersection forme l'arête de rebroussement.

On en conclut que l'arête de rebroussement est la ligne à double courbure située sur la surface développable et *enveloppée par ses arêtes*.

Note sur les Notiophilus,

PAR

Mr. Jul. PUTZEYS.

Les espèces européennes du genre *Notiophilus* sont fort peu nombreuses ; mais plusieurs d'entre elles sont sujettes à des variations de taille, de couleur, de forme et de ponctuation assez grandes pour que M. Waterhouse ait pu trouver, pour l'Angleterre seulement, matière à 18 espèces.

Il est certainement très-facile d'établir un type de chacune des espèces signalées par M. Schaum (Naturg. der Ins. Deutschl. I 62 sq.); mais pour peu que l'on ait réuni un certain nombre de ces insectes, on en trouvera certainement plus d'un que l'on hésitera à rattacher à une espèce plutôt qu'à une autre.

Duftschmidt attribuait à la différence des sexes les modifications existant dans la longueur ou la largeur. Dejean n'était pas éloigné de considérer tous les Notiophilus connus par lui en 1826 comme de simples variétés d'une espèce unique. (Voy. Spec. col. II p. 277.)

Le seul but que je me propose dans la présente note est de détailler les variétés auxquelles chaque espèce donne lieu.

Pour cela, il faut d'abord fixer bien nettement les caractères essentiels dont la réunion constitue chaque espèce.

Deux espèces surtout, *aquaticus* et *palustris*, sont très-voisines l'une de l'autre, tellement que Linné et Fabricius les ont confondues

et que, même après que Duftschmidt les eût distinguées, Gyllenhall, Dejean et Heer ont continué à les considérer comme de simples variétés.

Le *N. aquaticus* est de taille allongée : la tête n'est pas plus large que le corselet ; les stries qu'elle porte sur le vertex sont parallèles ; le corselet a ses côtés fort peu arrondis et se dirigeant obliquement vers la base qui est légèrement rétrécie.

Les élytres sont allongées, presque parallèles ; les stries, qui sont très-régulièrement ponctuées, disparaissent presque complètement vers l'extrémité ; les 2e et 3e intervalles sont plus larges que les autres, mais ce caractère n'est plus aussi distinct lorsque les points des élytres sont plus gros : le 2e porte, un peu avant le milieu, une fossette irrégulière qui en occupe toute la largeur ; on en remarque une seconde, moins large et moins profonde, vers l'extrémité de la 6e strie ; les intervalles des stries, surtout vers la base, sont finement, mais distinctement ciselés.

La couleur générale est un bronzé très-brillant : les pattes sont entièrement noires ; les quatre premiers articles des antennes sont ferrugineux en dessous ; les palpes sont noirs.

Le *N. palustris* est plus petit, surtout plus court, d'un noir brillant à peine bronzé ; les tibias, les quatre premiers articles des antennes et les 3 premiers articles des palpes sont testacés ; la tête est plus large que le corselet ; les sillons du vertex divergent en avant ; le corselet est arrondi sur les côtés, fortement rétréci avant les angles postérieurs ; les élytres sont ovales, les stries sont plus marquées et les points sont plus gros et moins régulièrement disposés, surtout vers la base ; les uns et les autres restent plus distincts vers l'extrémité ; outre les deux fossettes qui existent chez l'*aquaticus*, on en remarque une 3e au dessus de la dernière. Les intervalles des stries sont complètement lisses.

Dans l'une et dans l'autre espèce, on rencontre des variations de couleur, de forme, de stries et de ponctuation. Quand un caractère disparaît et que tous ou la plupart des autres subsistent, il n'y a pas de difficulté ; mais lorsque toutes ces modifications à la fois affectent un individu, il peut devenir fort embarrassant de lui assigner son espèce.

Les seuls caractères qui m'aient paru bien stables (au moins dans l'immense majorité des cas) chez l'*aquaticus* sont :

1° La forme du corselet.

2° Le parallélisme des sillons frontaux.

3° L'absence d'une fossette au dernier quart du 2e intervalle.

Chez le *N. palustris*, la coloration des tibias, des palpes et des antennes, ne varie que légèrement; il en est de même de la forme des élytres, des stries et de la ponctuation.

Voici l'énumération des variétés que j'ai sous les yeux :

N. Aquaticus. Linn.

La taille est ordinairement d'environ 6 mill. Dans certains individus Pyrénéens, il n'est pas rare de la voir descendre à 4 mill. Ces petits individus, souvent d'un bronzé très-clair, se trouvent dans plusieurs collections sous le nom de *N. Germinyi* Fauv. Mais le *Germinyi* appartient à l'espèce suivante :

A. *Coloration :*

1° Coloration générale noir bronzé, parfois d'un bronzé très-clair et brillant.

2° Coloration générale bleu d'acier. Chez plusieurs individus provenant : l'un de St-Hubert, deux du Harz, un des Eaux-Bonnes (Pyrénées), on remarque de chaque côté, avant l'extrémité, une tache rougeâtre allongée, isolée.

3° Quelques individus ont l'extrémité des élytres d'un bronzé très-clair, presque blanchâtre.

4° Il n'est pas rare de voir la base des palpes, surtout les articles 1 et 2, ainsi que la base du 3e et même ce dernier entier, fauves, mais non testacés comme chez le *N. palustris*.

5° La base des tibias est parfois d'un fauve sombre; j'ai même quelques individus dont les tibias sont en entier de cette couleur.

6° Quelquefois, les 2e et 3e articles des antennes sont fauves en dessus.

B. *Carènes frontales.*

Il peut arriver que les sillons frontaux ne soient point parallèles, mais divergent un peu en avant.

C. *Forme du corselet.*

Parfois le corselet est un peu plus étroit en arrière, sans cepen-

dant avoir les côtés, en dessus des angles postérieurs, aussi fortement sinués que chez le *N. palustris*.

D. *Forme des élytres :*

1° Les élytres sont parfois aussi courtes que chez le *N. palustris*. J'ai pris à Ostende un individu de cette variété qui réunit en outre les caractères des variétés : A. 4, 5, D. 2 et G ; mais il reste distinct du *palustris* par la forme de son corselet, l'absence du 2e point au dernier quart de l'élytre et par la coloration des antennes.

F. — 1° On représente souvent les élytres comme *lisses* à l'extrémité : c'est le cas le plus rare. Ordinairement toutes les stries, bien que s'atténuant considérablement, peuvent être distinguées jusqu'à l'extrémité ; quelquefois même, elles y restent aussi marquées que chez le *N. palustris*.

F. *Stries des élytres.*

2° M. *Cornelius* (Stett. E. Z. 1862. 78) a trouvé à Elberfeld une variété dont les deux premières stries dorsales sont réduites à quelques points en dessous de la base.

G. *Fossettes des élytres.*

Chez quelques individus, les élytres portent, avant le milieu, une fossette au dessus de celle qui existe normalement.

N. Palustris Duft.

A. *Coloration :*

1° La coloration générale est parfois, mais très-rarement, d'un bleu foncé :

2° Quelquefois elle est d'un bronzé clair.

3° L'extrémité des élytres est d'un bronzé blanchâtre.

4° Les premiers articles des antennes ne sont d'un fauve testacé qu'en dessous, comme chez le *N. aquaticus*.

5° L'extrême base seulement des tibias est fauve. Chez un individu communiqué par M. Fologne, les tibias sont *complètement* d'un fauve testacé.

B. *Carènes frontales.*

Quelquefois, les sillons frontaux sont parallèles, bien que restant toujours plus courts que chez le *N. aquaticus.*

C'est à cette variété qu'appartient le *N. Germinyi* dont M. Fauvel a bien voulu me communiquer le type. M. Von Bruck m'a communiqué un individu de Crefeld qui est tout aussi petit que le N. *Germinyi.*

C. *Forme du corselet.*

Le corselet peut être moins cordiforme, mais ses côtés restent toujours plus arrondis que chez le *N. aquaticus.*

D. *Forme des élytres.*

Chez certains individus, les élytres sont tout aussi allongées que celles du *N. aquaticus.*

F. La ponctuation des élytres, beaucoup moins grosse, est parfois aussi peu distincte à l'extrémité que dans le *N. aquaticus.*

G. 1° La 2e fossette, vers l'extrémité du 2e intervalle, est à peine distincte.

2° L'une des élytres porte, sur le 2e intervalle, avant le milieu, deux fossettes égales.

H. Ce n'est qu'avec hésitation que je range parmi les simples variétés du *N. palustris,* 7 individus (♂ et ♀) que j'ai sous les yeux, et qui présentent les caractères suivants: La couleur générale est celle de l'*aquaticus*, c'est-à-dire bronzé assez clair : les antennes, les palpes et les pattes sont colorés comme dans le *palustris;* la tête est moins large que dans cette dernière espèce ; les six carènes frontales sont parallèles et non divergentes ; le corselet est moins arrondi sur les côtés antérieurs, mais ces mêmes côtés sont moins profondément échancrés vers la base. Les élytres ne sont pas plus allongées que dans le *N. palustris*, mais elles sont plus convexes, non rétrécies un peu avant le milieu et par conséquent d'un ovale beaucoup plus régulier; elles sont striées et ponctuées comme dans le *N. palustris* mais ordinairement plus finement et plus régulièrement. L'un de

ces individus m'a été communiqué sous le nom de *N. hypocrita*.(1)
Curt. Brit. Ent. VI. pl. 254. Chaud. B. M. 1844-439.

N. Rufipes.

Schaum D. J. I. 67. — *Cornelius*, in Stett. E. Z. 1862.79.

Cette espèce est plus grande que les autres (7 mill.); elle est bien caractérisée par sa couleur bronzée, les 4 premiers articles des antennes, les deux premiers articles des palpes, les pattes (sauf parfois les cuisses) testacés; son corselet de même forme que celui du *N. palustris*; ses élytres dont les stries sont entières et très-fortement ponctuées, et la 2e fossette placée à l'extrémité du 2e intervalle. — Les intervalles des stries sont lisses.

Les seules modifications que j'ai remarquées, outre celles qui concernent la taille (laquelle n'est parfois que de 5 $^1/_2$ à 6 mill.) sont les suivantes.

A. *Coloration.*

1° Quelques individus sont d'un bronzé obscur.

2° Les élytres sont parfois d'un bronzé blanchâtre, (rarement testacées) à l'extrémité.

3° Les cuisses, surtout les postérieures, sont assez souvent d'un brun plus ou moins foncé.

B. *Carènes frontales.*

Elles sont normalement au nombre de 6 et divergent antérieurement:

1° Elles sont parfois au nombre de 8.

2° Elles peuvent être parallèles.

F. *Forme du corselet.*

Chez quelques individus, le corselet est moins cordiforme, c'est-à-dire plus large à la base et moins arrondi sur les côtés.

(1) Mr. Baudi a décrit (Berl. E. Z. 1864. 196) sous le nom de *N. strigifrons* un Notiophilus des Alpes du Piémont et dont il m'a communiqué le type. Il le compare au *N. aquaticus* : je pense qu'il eût mieux valu le comparer au *palustris* dont il a la forme, la ponctuation et la coloration. Sous le rapport de la taille, il est égal aux plus petits individus du *N. Germinyi* (4 mill.); de même que ce dernier, il a les carènes frontales plus parallèles, plus divisées en avant; mais il en diffère principalement par la longueur de ces carènes qui dépassent le milieu des yeux; les élytres sont plus régulièrement ovales et moins profondément ponctuées; la pointe sternale est plus étroite et plus allongée; les tibias sont d'une couleur testacée tout aussi claire que dans le type du *N. palustris*.

F. Chez un seul individu, j'ai remarqué deux fossettes sur le milieu du 2e intervalle de l'une des élytres.

En Belgique, cette espèce se trouve à la Barraque Michel, à Mons, dans la Campine et surtout dans les environs de Bruxelles où M. Fologne l'a recueillie abondamment.

N. Biguttatus Fab.

Cette espèce, qu'il n'est possible de confondre avec aucune autre d'Europe, si ce n'est peut-être avec la suivante, dont je parlerai tantôt, ne se modifie guère d'une manière sensible.

Voici les variations que j'ai observées :

A. *Coloration.* (1)

1° Elytres et corselet d'un noir bleuâtre.

2° La tache testacée de l'extrémité remonte assez souvent jusque vers le milieu des bords où elle devient rougeâtre et se fond insensiblement.

3° Quelquefois les premiers articles des antennes sont testacés en dessous seulement.

F. Carènes frontales.

Leur nombre normal est de 6, et elles divergent en avant :

1° Elles sont quelquefois au nombre de 8, par suite du dédoublement des deux carènes externes.

(1) On a l'habitude de considérer le *N. semipunctatus* Fab. (Mant. Ins. I. 188. 5.) comme étant une variété sans tache du *biguttatus*. J'ignore si une telle variété existe, du moins je ne l'ai vu signaler d'une manière positive par aucun auteur; cependant Mr *Schaum* (D. J. I 65) semble croire à son existence. L'ouvrage où Fabricius en parle avec le plus de détails est l'*Entomol. Syst. emend.* p. 180 n° 6. Voici tout ce qu'il en dit : « *Aeneus nitidus, elytris* » *punctatis, dorso glaberrimo.*— Halae saxonium. — *Elytra striato-punctata,* » *in medio ad suturam polita, glaberrima, pedes nigri.* » Le dernier caractère *pedes nigri* qui est tout-à-fait étranger au *N. biguttatus* me porte à supposer que l'insecte dont il s'agit appartient plutôt à un exemplaire plus fortement strié de l'*aquaticus* ou du *palustris*.

Je dois cependant ajouter que Mr Kiesenwetter (Stett. E. Z. 1846. 351) parle également du *N. semipunctatus* Fab. comme ne différant du *biguttatus* que par l'absence de tache jaune apicale.

Le *N. semipunctatus* dont parle Mr *Staudinger* (Stett. E. Z. 1857. 282) me paraît être l'*aquaticus*. Au moins il signale une variété d'un bleu d'acier avec une tache d'un brun sale à l'extrémité des élytres. (Voy. ci-dessus *N. aquaticus* var. A. 2.

2° Elles peuvent aussi, mais cela n'arrive que rarement, être parallèles.

C. *Forme du Corselet:*

1°) Il peut être plus court
2°) Ou bien plus large à la base avec les côtés plus droits
3°) Ou plus rétréci à la base
4°) Ou avoir ses angles postérieurs droits et non saillants.

D. *Forme des Élytres :*

Elles sont parfois un peu plus allongées.

E. *Ponctuation du Corselet :*

1° Le milieu des côtés non ponctué.
2° 2 fossettes imprimées de chaque côté.

F. *Stries des Élytres :*

1° Les points sont plus petits.
2° La partie du 2e intervalle située entre la base et la fossette centrale est élargie.
3° Les deux premiers intervalles sont plus larges et non convexes.
4° La 7e strie est visible presqu'à l'extrémité.

G. *Fossettes des élytres:*

1° Le milieu de chaque élytre porte 2 fossettes.
2° Une seule des élytres présente cette anomalie.

Ce sont ces deux dernières variétés que l'on confond souvent avec l'espèce suivante.

N. *IV.* Punctatus.

Dej. spec. II. 280. — Fairm. et La B.F. F. I. 9. n° 1.

Très-voisin du *N. biguttatus*. Un individu de cette dernière espèce, réunissant les variétés B. 1°, C, 2° et 4°, D., E. 2°, F. 1° et 2° G. 1 pourrait même être aisément confondu avec le *IV punctatus*.

En général, il est un peu plus petit que le *N. biguttatus*, plus étroit, ses élytres ont leurs côtés plus parallèles; les côtés

du corselet sont encore moins arrondis en avant, moins sinués avant les angles postérieurs qui, par conséquent, sont moins saillants; la dépression du corselet, à la base du sillon longitudinal, est plus profonde; les deux fossettes, de chaque côté, sont ordinairement moins marquées; les élytres dont les côtés ne sont que très-faiblement élargis au milieu, sont striées et ponctuées moins profondément; le 2e intervalle externe est notablement plus large que les autres dans toute son étendue; il porte, dans son milieu, deux larges fossettes; les taches de l'extrémité sont ordinairement moins testacées et moins étendues.

Cette espèce semble n'appartenir qu'au midi de la France, à l'Italie, à la Sicile et à l'Espagne.

Elle m'a offert les variétés suivantes :

B. Les carènes frontales sont parfois au nombre de 6.

C. Quelquefois, le corselet est plus rétréci vers la base.

E. La ponctuation du corselet varie assez : les espaces latéraux peuvent être presqu'entièrement ponctués : parfois on n'y distingue qu'une seule fossette.

F. Dans un individu, les stries des élytres sont plus marquées; dans un autre, le 2e intervalle est beaucoup plus large à sa base et se rétrécit jusqu'à la 1re fossette après laquelle il n'est guère plus large que les autres.

G. Le nombre des fossettes sur les élytres est sujet à varier; il peut n'en exister qu'une seule au milieu; chez un individu pris en Toscane par Mr. Von Bruck, il existe trois fossettes au milieu de l'élytre gauche.

N. Punctulatus. Wesm. Bull. Acad. Brux. 1835. I 22. — *Schaum* D. J. I 65.

Puncticollis Küster Kaef. Europ. XIII. I.—Berl. E. Z. V. 199.

Subopacus Chaud. B. M. 1852. 100. Berl. E. Z. 1857. 75 et 1861. 199.

Moins large que le *Geminatus*, plus allongé; tête plus petite. Le front ne porte ordinairement que 6 carènes, dont les deux externes se divisent parfois; ces carènes sont moins paral-

lèles. Le corselet est plus long, plus arrondi sur les côtés, plus rétréci en arrière, plus sinué au dessus des angles postérieurs qui, ainsi, sont plus saillants; les intervalles externes, 3, 4 et 5 sont moins convexes et moins distinctement ciselés.

La tache qui occupe ordinairement l'extrémité des élytres pâlit parfois et prend une teinte bronzé-clair analogue à celle que l'on voit chez le *N. Geminatus*.

Chez un individu trouvé à Anvers, les côtés du corselet sont presque droits jusqu'au sinus au dessus des angles postérieurs qui sont tout aussi saillants que dans le type.

Quelquefois, le milieu de l'élytre porte une 2e fossette au dessus de celle qui est normale ; mais je n'ai pas vu d'individu portant la fossette surnuméraire qui existe souvent dans le *geminatus* avant l'extrémité du 4e intervalle.

Bien que cet insecte paraisse appartenir surtout à l'Europe tempérée, j'en ai vu des individus recueillis par Mr. Von Bruck dans les Apennins de la Toscane et dans les Pyrénées. J'en ai reçu de Marseille et j'en ai vu dans la coll. de Mr. de Chaudoir plusieurs ex. venant du Caucase, de la Transcaucasie (*Subopacus Chaud.*) I. ind. provenant de la Croatie figurait dans la coll. Dejean parmi les *biguttatus*.

N. Geminatus Dej. spec. V. 589. 4.

D'un bronzé noirâtre peu brillant : les 2 1ers articles des palpes, la base des 4 1ers articles des antennes et les tibias sont d'un testacé rougeâtre.

L'insecte est plus large dans toutes ses proportions que le *N. Punctulatus;* la tête est plus grosse; les carènes frontales sont plus nombreuses et plus parallèles : la partie antérieure des carènes externes est moins régulière et un peu confuse. Le corselet est plus large, moins arrondi sur les côtés qui sont presque parallèles, et ne sont que très légèrement sinués avant les angles postérieurs qui sont moins saillants que dans le *punctulatus*; toute la surface est plus uniformément ponctuée; les deux fossettes, de chaque côté de la base, sont plus arrondies.

Les élytres sont moins allongées; les intervalles externes (surtout 2 à 6) sont moins finement ciselés; les 4e et 5e sont très convexes jusqu'au milieu, et le 7e jusqu'à l'extrémité.

L'extrémité des élytres est ordinairement d'un bronzé un peu blanchâtre, quelquefois jaunâtre.

Var. a. Outre le point tuberculaire placé à l'extrémité du 3e intervalle, on en remarque un autre plus petit situé un peu plus haut sur le 4e intervalle. (2 ind. pris par Mr Von Bruck dans les Apennins de la Toscane et 1 d'Algérie envoyé par Mr Poupillier.) Les ex. de Mr de Chaudoir appartiennent à cette variété.

Cette espèce paraît propre au Bassin de la Méditerranée; j'en ai vu de Toscane, de Sicile, d'Algérie et des Iles Canaries. Mrs *Waltl* et *Rosenhauer* la disent très-commune en Andalousie où elle serait même l'unique espèce de *Notiophilus*.

Mr *Schaum* (Berl. E. Z. 1861. 199.) regarde le *N Marginatus* Géné, comme étant une simple variété du *geminatus*.

La communication que Mr le baron de Chaudoir a bien voulu me donner des *Notiophilus* de sa collection, m'a permis de dresser le tableau suivant de 17 espèces dont trois sont nouvelles.

I. ELYTRA CONCOLORIA.

Elytra subcylindrica.

Palpis omnino nigris.	Aquaticus.
Palporum artis 3 primis testaceis.	
Tibiis testaceis.	
Pronoti angulis posticis acutis.	Acuticollis. (1)
Subacutis.	Laticollis. (2)
Tibiis nigris.	Longipennis. (3)

Elytra oblongo-ovata.

I. Pedibus rufis.

Antennis rufis.	Porrectus. (4)
Basi tantum rufis.	Rufipes.

II. Palpis tibiisque nigris. . . . . .

Frons VI-carinata.	Hardyi. (5)
Pluri-carinata.	Semiopacus. (6)

III. Palporum articulis 3 primis tibiisque testaceis.

Stria marginalis sicut cæteræ punctata. . .	Confusus.
minus distincte. (7)	
Interstitia striarum punctulata.	Orientalis.
— — non (8)	
Striae 2_a et 3_a ante medium evanescentes. .	Semistriatus.(9)
Post medium distinctae.	Palustris.

(1) voy. ci-après n° 1. (2) voy. ci-après n° 8. (3) voy. ci-après n° 2. (4) voy. ci-après n° 3. (5) voy. ci-après n° 4. (6) voy. ci-après n° 5. (7) voy. ci après n° 6. (8) voy. Chaud. B. M. 1850. 164. (9) voy. ci-après n° 7.

II. ELYTRA BICOLORIA.

Striae grosse punctatæ.
Stria 1ª ante apicem non sinuata. . . . . Sylvaticus. (10)
Sinuata.
Interstitio 3° in medio unifoveolato. . . . . Bigutattus.
bifoveolato. . . . . IV. Punctatus.
Striæ tenuiter punctulatæ.
Angustior, interstitiis glabris, carinulis frontalibus VI vel VIII. . . . . Punctulatus.
Latior, interstitiis tenuiter cælatis, carinulis frontalibus XII. . . . . Geminatus.

(10) voy. Esch. Z. A. V. 24. Fab. XXV. fig. 5. Sitka.

1. *N. Acuticollis.*

Long. 6 1/4 Lat. 2 1/2 Mill.

D'un noir bronzé; les 3 premiers articles des palpes, les tibias sont testacés de même que le 2e article des antennes et le dessous des 1er, 3e et 4e.

La tête est plus large que celle du *N. Palustris* à laquelle elle ressemble pour le surplus. Le corselet a la même forme que dans cette espèce, mais il est arrondi jusqu'après le milieu et se rétrécit plus subitement au dessus des angles postérieurs qui sont beaucoup plus saillants et plus aigus; la surface est plus convexe; elle est ponctuée de même, cependant les points sont un peu plus gros. Les élytres sont plus convexes, beaucoup plus allongées et se rapprochent de celles de *l'Aquaticus;* mais les épaules sont plus arrondies et l'extrémité est plus rétrécie; les stries sont plus fortement ponctuées et aucune d'elles ne disparaît vers l'extrémité où elles portent un double point tuberculaire comme dans le *Palustris;* les stries externes sont beaucoup plus profondément ponctuées; l'avant-dernière strie est bien marquée jusqu'au de là du milieu et la strie marginale est fortement ponctuée; la strie suturale n'est pas courbée avant son extrémité; la strie prèscutellaire est située entre l'écusson et la strie suturale. Les intervalles des stries sont lisses.

Chine boréale. La coll. de Mr de Chaudoir n'en renferme qu'un seul individu.

2. *N. Longipennis.*

Il est un peu plus petit et moins allongé que *l'Aquaticus*; les 3 premiers articles des palpes sont testacés; le dernier est noir, de même que l'extrémité du 3e. Les 4 premiers articles des antennes sont testacés en dessous. Les pattes sont entièrement d'un noir bronzé. L'espace occupé par les carènes frontales est plus large ; les six carènes sont plus longues et les intérieures divergent légèrement en avant.

Le corselet est plus court, plus large antérieurement que celui de l'*Aquaticus,* les côtés antérieurs sont moins arrondis, mais moins cependant que dans le *Palustris;* la ponctuation du *dessous* du corselet est aussi peu serrée au milieu que dans *l'Aquaticus.* Les élytres sont allongées, subcylindriques; leurs stries sont à peine distinctes vers l'extrémité; assez finement ponctuées; le 2e intervalle porte, vers l'extrémité, une seconde fossette comme dans le *Palustris.* La strie préscutellaire est très longue. Les intervalles des stries sont ciselés.

Arménie. 2. ind. ♂ et ♀ coll. de Chaudoir.

3. *N. Porrectus* Say Trans. 8. P. S. IV.— Le Conte Geod. col. 178. 4.

États-Unis.

4. *N. Hardyi.*

Plus petit, mais presqu'aussi allongé que *l'Aquaticus.* Entièrement d'un bronzé obscur, un peu verdâtre sur les bords. Les palpes, les antennes (excepté les 4 premiers articles qui sont testacés en dessous) et les pattes sont noirs; les tibias sont plus ou moins testacés dans leur moitié supérieure.

La tête est la même que celle de l'*Aquaticus*; seulement, les carènes frontales divergent légèrement en avant. Le corselet (ponctué de même et dont le sillon longitudinal est un peu plus profond) est plus arrondi en dessous des angles antérieurs et plus échancré avant les angles postérieurs qui sont ainsi plus saillans; le bord latéral à cet endroit est plus relevé. Ces derniers caractères sont cependant bien moins prononcés que dans le *Palustris.* Les élytres sont striées et ponctuées comme dans l'*Aquaticus,* sauf qu'elles disparaissent encore plus complètement vers l'extrémité où la 1re et la dernière restent seules distinctes. Les intervalles des stries sont lisses.

Mr le baron de Chaudoir possède plusieurs individus de cette espèce qui vient de Terre-Neuve.

J'y ai remarqué 3 variétés.

La 1re est plus noire et l'extrémité des élytres présente une étroite bande jaune.

Dans la 2e, les carènes frontales sont exactement parallèles.

Dans la 3e, l'une des élytres porte à l'extrémité de la 2e strie une fossette comme dans le *N. Palustris*.

5. *N. Semi-opacus* Esch. Z. A. V. p. 25 Tab. XXV. f. B,

J'ai examiné le seul individu que possède Mr de Chaudoir et je me borne à relever les caractères suivants, renvoyant pour le surplus à la description d'Eschscholtz.

Les palpes et les tibias sont noirs; les antennes sont colorées comme dans le *N. Aquaticus*. Le front porte 12 carènes assez fines et régulières. Le corselet est carré. L'extrémité de chaque élytre porte deux points tuberculaires comme le *N. Palustris*.

La 2e strie porte au milieu trois fossettes bien marquées : mais c'est peut-être là un accident. La strie préscutellaire est double, ou plutôt on distingue à la base du 1er intervalle le commencement de deux stries obliques. Les intervalles sont très distinctement ciselés.

Californie.

6. *N. Confusus* Lec. Geod. col. p. 177. 1.

Les palpes, les antennes et les tibias sont semblables à ceux du *N. Palustris;* la tête est plus large, mais les carènes frontales divergent également à leur partie antérieure. — Le corselet a les côtés un peu plus droits, moins échancrés au dessus des angles postérieurs. Les élytres sont semblables, elles sont striées et ponctuées de même, mais elles ne portent avant l'extrémité qu'une seule fossette et la strie submarginale est entièrement distincte. — Les intervalles des stries sont lisses.

États-Unis.

7. *N. Semistriatus. Say* Trans. A. S. s. II. — *Lec.* Geod. col. p. 178. 2.

La coloration est la même que celle du *N. Palustris*, mais un peu plus claire et plus brillante. La taille est à peine de 5 mill. La tête est plus large; les 6 carènes sont parallèles comme dans *l'aquaticus*, sauf les 2 externes, et plus fines.

La forme du corselet est celle de l'*Aquaticus;* cependant, les côtés sont encore moins arrondis en dessous des angles antérieurs et moins sinués en dessus des angles postérieurs; les fossettes de la base sont plus larges, moins arrondies et toute la base est plus ponctuée. Les élytres sont plus courtes, plus ovales; l'intervalle entre la 1re et la 2e strie est plus large; les 2e, 3e et 4e stries sont plus fines et commencent à disparaître dès après le milieu; les autres s'étendent et sont ponctuées jusqu'au bout; un peu avant l'extrémité, on voit reparaître un fragment de la 2e strie qui se réunit à la 1re. De même que dans le *N. Palustris*, il y a sur le 3e intervalle trois gros points tuberculaires : l'un vers le milieu de l'élytre, les deux autres un peu avant l'extrémité. L'extrémité des élytres est ordinairement un peu jaunâtre. La strie préscutellaire paraît double comme dans le *N. Semiopacus*. Les intervalles des stries sont lisses.

États-Unis.

8. *N. Laticollis* Chaud. Bull. Mosc. 1850. 162.

M de Chaudoir a parfaitement exposé les caractères qui séparent cette espèce des *N. Aquaticus* et *Palustris*.

La coloration des palpes, des antennes et des tibias est comme dans le *N. Palustris*. Les carènes frontales sont parallèles comme dans le *N. Aquaticus*, mais plus longues. Le corselet est plus large à la base que dans cette dernière espèce, moins arrondi sur les côtés antérieurement et les angles postérieurs sont moins saillants. Les élytres sont plus ovales, plus rétrécies aux épaules, mais à peine moins allongées; les intervalles des stries externes sont moins convexes, plus distinctement ciselés; la 2e strie est un peu plus distintce à l'extrémité; le 3e intervalle porte postérieurement un double point tuberculaire comme dans le *Palustris*.

Odessa et Crimée.

Il ne sera pas sans intérêt de donner ici la liste des *Notiophilus* qui ont été décrits jusqu'à ce jour.

Acuticollis. P. (voy. ci-dessus).	Chine boréale.
Aeneus Lec. (Porrectus Say.)	Am. bor.
Aquaticus. Linn. (voy. ci-dessus.).	
Biguttatus. Fab. (voy. ci-dessus.).	
Brevicollis. Wat. (Palustris Duft.)	
Brevis Wat. 8. (Palustris Duft.)	
Confusus. Lec. (voy. ci-dessus.)	Amér. bor.
Dauricus. Motsch. Col. Jakutsk. n° 10. (Aquaticus Linn. voy. Chaud. B. M. 1850. 164.)	Daourie.
Davisii Wat. Mon. nat. n° 5.	
Fasciatus. Mäkl. Stett. E. Z. 1857. 335.	Sibér. or.
Geminatus. Dej. (voy. ci-dessus).	Eur. m. Alg.
Germinyi. Fauv. (Palustris Duf. voy. ci-dessus.) . .	Syrén.
Hardyi. P. (voy. ci-dessus.)	Terre Neuve.
Impressifrons. Moraw. B. St. P. 1862.	Amur.
Laticollis Chaud. (voy. ci-dessus.	Crimée.
Latior Wat. 9. (Palustris Duft.)	
Latus. Wat. 15. (Biguttatus Fab.)	
Longipennis. P. (voy. ci-dessus).	Arménie.
Marginatus. Géné. (Geminatus var. voy. Berl. E. Z. V. 199.)	Sardaigne.
Metallicus. Wat. 2. (Aquaticus Linn.)	
Newmanni. Wat. 6. (Aquaticus Linn.)	
Nitidulus. Wat. Ent. Mag. I. n° 3.	
Nitidus. Wat. 15. (Biguttatus Fab.)	
IX Striatus. Lec. Geod. Col. p. 178.	Amér. bor.
Orientalis Chaud. (voy. ci-dessus.)	Himalaya.
Palustris Duft. (voy. ci-dessus.)	
Palustris Steph. (Biguttatus F. voy. Stett. E. Z. 1848-41.)	
Parallelus Wat. Mon. nat. n° 4.	
Parvulus Wat. Mon. n° 11.	
Porrectus. Say. (voy. ci-dessus)	Amér. bor.
Punctatus Say. (Sibiricus Motsch.)	Id.
Puncticollis. Küst. XIII. I. Punctulatus W. voy. Berl. E. Z. V. 199.).	
Punctulatus. Wesm. (voy. ci-dessus.	
Pusillus. Wat. Mon. n° 10.	
IV. Punctatus Dej. (voy. ci-dessus).	
Rufipes Curt. (voy. ci-dessus.)	
Semiopacus Esch. (voy. ci-dessus.	Calif.

Semipunctatus Fab. (Biguttatus Fab.	
Semistriatus Say. (voy. ci-dessus).	Amér. bor.
Sibiricus Motsch. J. S. 85.	Sibér.
Striatus Wat. n° 13. (Biguttatus Fab.	
Strigifrons. Baudi. (Berl. E. Z. 1864. 196. (voy. ci-dessus.	Piémont.
Subopacus Chaud. (voy. ci-dessus. Punctulatus W.).	
Substriatus Wat. 17. (Biguttatus Fab.)	
Sylvaticus. Esch. (voy. ci-dessus.)	
Tibialis Wat. n° 7. (Palustris Duft. voy. Stett. E. Z. 1848. 41.)	

Etude sur les Amara

DE LA COLLECTION DE M^r^. LE BARON DE CHAUDOIR,

PAR

M^r^. Jul. PUTZEYS.

La Monographie des Amaroïdes publiée en 1832 par Zimmermann est l'un des travaux les plus complets qui aient été faits sur les coléoptères : tous les détails de l'organisation de ces insectes y ont été étudiés avec le soin le plus consciencieux; des groupes, basés, pour la plupart sur des caractères importants, ont été formés, et si les résultats n'ont pas été complètement satisfesants, il faut s'en prendre, non à l'auteur, mais à la nature de la tâche qu'il avait entreprise.

Si l'on n'avait que les *A. Brunnea* (1), *Aegyptia* (2), *Cottyi* (3), *Trivialis* (4), *Bifrons* (5), *Aulica* (6), *Consularis* (7) et *Patricia* (8), rien ne serait plus naturel que les genres que l'on établirait sur ces types, qui diffèrent, non seulement par la forme extérieure, mais par des caractères ayant une valeur sérieuse, tels que la présence ou l'absence d'une pubescence épaisse à la partie interne des tibias postérieurs—l'existence de deux fortes dents en dessous des tibias intermédiaires — une dent unique, soit longue et aiguë, soit très-large et obtuse, ou une dent nettement bifide dans l'échancrure du menton — un corselet très-rétréci ou très-élargi à la base etc.

(1) Acrodon.
(2) Amathitis.
(3) Leiocnemis.
(4) Amara.
(5) Celia.
(6) Curtonotus.
(7) Bradytus.
(8) Percosia.

Mais dès que l'on aborde le classement des espèces dans les genres auxquels elles doivent appartenir, on est surpris des résultats auxquels on arrive : des insectes, tellement voisins qu'ils ont pu être confondus (*A. Famelica* et *Biarticulata*) se trouvent placés dans des genres différents (*Amara* et *Celia*); un même genre (*Leiocnemis* renferme des espèces courtes, convexes, presqu'orbiculaires (1), d'autres presque cylindriques (2), d'autre allongées, à élytres planes et ayant un facies d'*Anchomenus* (3).

Les caractères, même les plus importants, s'atténuent tellement dans certains cas, que le genre auquel des espèces appartiennent reste douteux.

Tout cela prouve l'unité du genre *Amara*, tel qu'il a été établi par Bonelli et l'impossibilité de le démembrer.

Les groupes établis par Zimmermann et celui dont je proposerai plus loin la création, ne peuvent donc être considérés comme ayant une valeur générique : ce sont tout au plus des sous-genres dont les limites sont parfois très difficiles à tracer.

Le présent travail n'est point une Monographie.

Mr le baron de Chaudoir ayant bien voulu mettre à ma disposition sa riche collection d'*Amara*, qui contient, outre les propres types de cet entomologiste, tous ceux de Dejean, ceux de Gebler, Faldermann, beaucoup de ceux de Mannerheim, Motschulski, Le Conte etc., je n'ai pas cru pouvoir laisser échapper l'occasion d'utiliser des matériaux aussi importants.

Mon travail ne sera donc, en majeure partie, qu'une étude faite sur la grande collection dont il s'agit.

J'ai, en général, maintenu les groupes établis par Zimmermann, tout en tenant compte des recherches accomplies pendant les trente dernières années.

Mon examen ayant eu pour objet principal les collections Dejean et de Chaudoir, j'ai toujours cité, soit le *Species*, soit le Bulletin de Moscou.

Quant aux espèces européennes, l'excellent travail de Mr Schaum (Deutschl. Ins. I p. 502 à 550) m'a presque toujours dispensé

(1) Cottyi, brevis.
(2) Crenata.
(3) Cordicollis.

de m'occuper de la synonymie et je me suis borné à renvoyer à l'entomologiste Berlinois.

Je suis resté dans l'incertitude sur plus d'une espèce de l'Amérique du Nord.

Ces insectes ont eu une chance malheureuse. Dejean les recevait du major Le Conte et les décrivait sans se douter que plusieurs avaient déjà été décrits par Say. Établir une synonymie exacte de ces espèces eût donc été le besoin le plus pressant; mais Le Conte ne s'en est pas préoccupé dans son premier mémoire sur les carabiques des États-Unis (1) et lorsque, plus tard, il a essayé une révision des *Amara* de ce pays, il n'a pas pris la précaution de vérifier les espèces de Dejean; ses diagnoses, en outre, ont été la plupart du temps trop succinctes pour que l'on puisse reconnaître avec certitude les insectes qu'il a eus en vue.

J'ai fait usage de plusieurs caractères dont il est nécessaire que je dise quelques mots :

1° Les stries des élytres partent toutes d'un rebord qui longe la base depuis l'écusson jusqu'à l'épaule; souvent il y a une dépression de ce rebord à la naissance des premières stries; souvent aussi ce rebord, au lieu de se diriger horizontalement vers l'épaule, remonte jusqu'à ce dernier point.

2° La 8e strie porte quelques gros points en dessous de l'épaule et vers l'extrémité :

Ces points sont toujours assez serrés. Dans certains cas, il y a des points semblables, mais plus espacés, entre ces deux séries principales : Lorsque ces points intermédiaires sont placés à égale distance les uns des autres, j'ai considéré la série comme continue.

3° La strie préscutellaire part le plus souvent de la base de la 2e strie et, se prolongeant obliquement en arrière, elle va se réunir à la strie suturale; quelque fois, cette réunion n'a pas lieu; quelque fois aussi, la strie préscutellaire part du rebord basal entre la 1re et la 2e strie; rarement elle est située entre l'écusson et la 1re strie, mais ce n'est que par l'examen d'un certain nombre d'individus que l'on peut s'en assurer.

4° Il arrive assez souvent que la strie préscutellaire a sa

(1) Ann. of Lyc. vol. IV (1846.)

naissance *plus bas* que la base de la 2e strie, dans une fossette arrondie toujours fort distincte.

Ce caractère est très constant. Il n'existe pas dans les *Bradytus*, *Acrodon*, *Amathitis*, *Curtonotus*, *Leirides* et *Percosia*. On ne le rencontre que dans 3 *Leiocnemis* (nos 91, 92, 93) et dans les *Celia* nos 51, 66 et 67. C'est dans les *Amara* qu'il est le plus fréquent, (nos 1 à 19, 34, 36, 37 et 41.)

I. Tibias postérieurs des ♂ pubescens intérieurement.

a.) Dent du menton bifide.

†. Corselet rétréci en arrière. . . . *Bradytus.*
††. Corselet rétréci en avant. . . . *Amara.*

b.) Dent du menton non bifide.

†. Corselet rétréci en avant. . . . *Acrodon.*
††. Corselet rétréci en arrière. . . . *Amathitis.*

II. Tibias postérieurs des ♂ non pubescens intérieurement.

A. Pointe du prosternum sans poils sur ses bords ou n'en ayant que deux.

a.) Episternes métathoraciques longs.

*. Tibias intermédiaires des ♂ non bi-ou tridentés en dessous.

†. Corselet plus étroit à sa base qu'à l'extrémité. *Leiocnemis.*

††. Corselet pas plus étroit en avant qu'à la base. . . . . *Celia.*

**. Tibias intermédiaires des ♂ bi-ou tridentés en dessous. . . . . *Curtonotus.*

b.) Episternes métathoraciques courts et larges. *Leirides.*

B. Pointe du prosternum portant de chaque côté 3 ou 4 points pilifères. . . . . *Percosia.*

AMARA Zim.

Chez toutes les *Amara* proprement dites, la pointe sternale est sillonnée, mais elle ne porte aucun point pilifère.

1er GROUPE. Zim. (*Triaena Lec.*)

La strie préscutellaire porte, à sa base, une fossette arrondie.

1. *A. Striatopunctata. Dej.* Spec. III 480. 22. — *Schaum* D. J. I 517. 14.

A. *Valida* Fairm. Ann. S. ent. 1859. 21. — Cf. Berl. E Z. 1861. 206. 29.

La collection Dejean contient des individus du midi de la France, d'Espagne, de Grèce et de Constantinople.

Mr de Chaudoir en possède deux autres venant de Lenkoran et qui constituent une variété un peu plus courte, moins convexe et avec les intervalles des stries plus plans.

2. *A. Rufipes Dej.* Spec. III 478. 21. — *Schaum* D. J. I. 517. 15.

France méridionale, Italie, Grèce et Algérie.

Mr de Chaudoir (Carab. du Caucase p. 158. 209) en a pris en Georgie une variété plus grande et dont les angles postérieurs sont plus réfléchis. C'est probablement A. *Reflexicollis* Motsch. Ins. Sib. p. 183.

3. *A. Chaudoirii* Hochuth. (*Schaum* D. J. I 518.)

Mr Schaum signale cet insecte comme une variété bleue de l'A. *Rufipes*. J'en ai sous les yeux neuf individus et je crois que c'est une espèce distincte.

Elle est plus courte que l'A. *Rufipes*, plus large : le rebord basal du corselet est plus fortement sinué ; les angles postérieurs sont plus aigus ; la base est couverte de points plus gros et ordinairement beaucoup plus nombreux ; les points des stries sont également plus gros.

Kiew. Dans les prairies.

4. *A. Erythrocnema.* Zim. (cf. *Schaum* D. J. I 518. note.) *floratis* Gaub.

2 ex. du midi de la France étiquetés par Dejean du nom de *Rufipes*.

2 autres de Trieste et un de Syrie. Ce dernier est notablement plus long.

5. *A. Lepida* Zim. — *Schaum* D. J. 518. 16.

2 ex. du midi de la France, provenant de la coll. Gory.

Mes exemplaires viennent des environs de Louvain où l'insecte se trouve dans les prairies un peu humides.

6. *A. Tricuspidata*. Dej. Spec. V. 792. 65. *Schaum* D. J. I 519. 17.

Les ex. de la collection Dejean viennent du Nord de l'Allemagne. Mr de Chaudoir en possède d'autres de Sarepta. J'en ai d'Angleterre et des Pyrénées, mais surtout de Liége où cet insecte est très-abondant aux mois de mai et de juin au sommet des graminées dans les prairies.

Parfois les angles antérieurs du corselet ne sont pas saillants.

7. *A. Strenua* Zim. — *Schaum* D. J. E. 520. 18.

3 individus. France Orientale. Paris. L'un de mes exemplaires vient de cette dernière localité, l'autre du nord de l'Allemagne.

8. *A. Scitula* Zim. Mannerh. Bull. Mosc. 1843. II 208.— *Le Conte* Philad. Proc. 1856. 350.

Californie. 2 ind.

9. *A. Plebeja* Gyll. — Schaum D. J. I. 521-19.

Les ex. de la coll. Dejean sont de Suède, des Basses-Alpes et d'Autriche; ceux de la coll. de Chaudoir viennent de Kiew. Cette espèce est des plus communes en Belgique.

10. *A. Angustata* Say. (Feronia) — *Le Conte* Philad. Proc. 1856. 350.— *Am. Indistincta* Hald.

Commune dans les parties centrales et méridionales des États-Unis.

Ainsi que le fait remarquer Mr Le Conte (l. c.) c'est par nadvertance que Zimmermann a placé cette espèce dans son 3e groupe où les tibias antérieurs sont terminés par une épine simple.

2e GROUPE. Zim.

La strie préscutellaire porte à sa base une fossette arrondie.

11. *A. Similata.* Gyll. - Dej. Spec. III. 461. 3. — *Schaum* D. J. I. 522. 20.

L'Amara praetermissa (Sahlb. Ins. Fenn. 246 et Dej. Spec. V. 789. 3.) n'est pas même une variété; c'est simplement un exemplaire un peu plus petit, de couleur noire avec les tibias d'un brun obscur; les antennes sont colorées comme dans l'espèce.

La coll. de Mr de Chaudoir en renferme plusieurs autres exemplaires un peu plus grands, et j'en possède plusieurs trouvés aux environs de Bruxelles.

12. *A. Chalcites.* Zim. — Cf. Dej. Spec. III. 461. 3.

A. Congrua Mor. B. 5e P. 1862.

Cet insecte, que Dejean a regardé comme une simple variété de l'*A. Similata*, a été à bon droit décrite comme espèce par Zimmermann.

L'exemplaire de la coll. Dejean vient du Japon; la coll. de Chaudoir en a deux autres du Nord de la Chine; j'en possède également deux de ce dernier pays.

13. *A. Subconvexa.* Chaud. (coll.) Long. 8. 9. Lat. 3 1/3 4 1/4 mill.

D'un noir brillant en dessus et pour le surplus colorée comme la *Similata*. Le corselet est de la même longueur, mais il est plus convexe et notablement plus rétréci vers la base où il est moins large que la base des élytres; les côtés qui, dans l'*A. Similata*, cessent d'être arrondis à partir du milieu, continuent, dans la nouvelle espèce, à être arrondis jusqu'à la base; les angles postérieurs sont obtus et beaucoup moins grands; les deux fossettes de la base sont plus marquées, surtout l'externe qui est aussi profonde que l'autre et presqu'arrondie; les élytres sont plus convexes et surtout moins rétrécies à l'extrémité.

Algérie. 3. ind. dont l'un étiqueté par Dejean comme ayant été rapporté de Tanger par Goudot. C'est celui que Dejean signale dans le Species (III 462) et qu'il confond avec l'*A. Similata*.

14. *A. Saphyrea.* Dej. Spec. III. 463. 4. (4 ind. de la coll. Dejean et venant du Bannat.)

15. *A. Ovata.* Fab. *Schaum.* D. J. I. 523. 20. *Obsoleta.* Dej. Spec. III. 460. 2.

Les ex. de la coll. Dejean sont de Suède, d'Allemagne, de Belgique et du midi de la France. Mr de Chaudoir en possède de Moravie et de Kiew. En Belgique, elle se rencontre dans toutes les localités.

La variété bleue décrite par Kolenati (Melet. ent. I. 45) sous le nom d'*A. Adamantina* paraît se trouver principalement au Caucase et en Crimée.

5e GROUPE. Zim

1re et 2e Dons.

Je réunis ces deux divisions qui ne diffèrent entre elles que par le plus ou le moins de profondeur des stries à l'extrémité des élytres. Sauf dans les 5 premières espèces et la dernière, la strie préscutellaire est dépourvue de fossette à sa base; elle part de la base de la 2e strie.

16 *A. Palustris.* Baudi (Berl. Ent. Zeit. 1864. 210.)

Cette espèce appartient à la 2e Div. du 5e Groupe de Zimm.

La strie préscutellaire part d'un point ocellé situé en dessous de la base.

Les caractères signalés par Mr Baudi ont été relevés sur un grand nombre d'individus; ils peuvent donc être regardés comme solides. La faible convexité du corselet et des élytres pourraient faire placer l'insecte près de l'*A Spreta;* mais sa forme courte et la largeur des élytres en arrière le rapprochent de l'*A. Montivaga.* J'en possède un ♂ que Mr Baudi a bien voulu me donner. La collection de Mr de Chaudoir renferme une ♀ que Dejean avait reçue de Mr Gené, et qui est plus grande et un peu plus allongée que le type. Mr Baudi m'écrit qu'au Musée de Turin il existe également deux individus de cette variété.

Mr Poupillier m'a envoyé d'Alger les deux sexes d'une *Amara* que je ne crois pas pouvoir séparer de la *palustris* bien que les

angles antérieurs du corselet soient un peu plus aigus que dans le type.

17. *A. Montivaga.* Sturm. — Zimmerm. — Schaum. D. J. I. 524. 22.

Dejean (Spec. III 461) considérait cette espèce comme une simple variété de coloration de l'*A. Ovata*. Zimmermann en a parfaitement indiqué les caractères distinctifs.

Les ex. de la coll. de Chaudoir viennent surtout de l'Allemagne, quelques uns de Lyon et de la Carniole. En Belgique on rencontre particulièrement cette espèce dans la vallée de la Meuse. M^r^ Roffiaen, de Bruxelles en a pris en Suisse, l'été dernier, un nombre considérable.

18. *A. Impunctícollis.* Say. Le Conte l. c. p. 351, n° 24.

États-Unis du centre et de l'ouest. M. de Chaudoir en possède de nombreux exemplaires : l'un d'eux figurait dans la coll. Dejean sous le nom d'*A. Communis*. J'en possède plusieurs venant de New-York.

19. *A. Fallax.* Le Conte, Geod. col. p. 90 n° 6, et Proc. Philad. 1856 p. 353. 29.

C'est, je pense, à cette espèce qu'il faut rapporter les individus américains de l'*A. Similata* qui se trouvent dans la coll. Dejean et qui sont signalés dans le Species. Elle paraît varier beaucoup, mais toutes les différences que j'ai pu constater s'entrecroisent dans les nombreux individus que j'ai examinés.

Elle est, en général, plus ovale que la *similata;* la base du 3^e^ article des antennes est plus comprimée et présente une carène un peu plus tranchante ; le corselet est moins court et plus rétréci en avant ; ses côtés sont plus droits au-dessus des angles postérieurs ; la base n'est nullement ponctuée ; les élytres sont plus longues, plus acuminées à l'extrémité ; les stries sont moins profondes au bout : la série de gros points sur la 8^e^ strie n'est pas continue, mais elle s'interrompt une ou deux fois vers le milieu ; les épisternes métathoraciques sont complètement lisses ; le dernier segment abdominal

porte deux points de chaque côté, rapprochés dans le ♂, écartés chez la ♀.

Chez certains individus, le corselet et les élytres sont plus larges, chez d'autres, le corselet est un peu plus long: parfois les stries des élytres sont très-fines et les intervalles tout à fait plans.

Cette espèce semble être très-commune dans les environs de New-York.

20. *A. Littoralis* Mannerh. Bull. Mosc. 1843 n° II. p. 207. 66. — Le Conte l. c. p. 351. 25.

Dejean a confondu cette espèce avec l'*A. Plebeja* dont elle diffère essentiellement. Outre l'ex. de Dejean, la coll. de M. de Chaudoir en renferme un provenant de la coll. Falderman et originaire du Kamtschatka. D'autres exemplaires, de Sitka, viennent de M. de Mannerheim. Un autre vient de Kadjak, un autre enfin est étiqueté *A. Tripartita*. Motsch.

21. *A. Cupreolata* nov. sp.

Long. 7. Lat. 3 1/2 mill.

Cet insecte, qui est une *Amara* bien caractérisée, n'appartient à aucune des espèces de ce genre décrites par Le Conte. Il est d'un cuivreux tout aussi brillant que la *C. Chalcea* D. Il est assez voisin de l'*A. Impunctícollis* et c'est à cette espèce, bien connue, que je vais le comparer.

Sa taille est plus petite, plus étroite: la tête est plus large en arrière; les yeux sont moins saillants et moins enchâssés. Le corselet est plus convexe, beaucoup moins large vers la base; ses côtés sont plus arrondis (chez l'*Impunctícollis* ils sont droits en dessous du milieu); les angles antérieurs sont plus saillants, mais plus arrondis; les angles postérieurs sont beaucoup plus obtus; de même que chez l'*Impunctícollis*, la base ne porte qu'une seule impression distincte, linéaire et courte; l'impression externe se borne à une très-faible dépression; les élytres sont en ovale plus allongé, moins larges à la base et se rétrécissant moins à l'extrémité; elles sont plus convexes, plus profondément striées; les stries sont plus profondes à l'extrémité; les intervalles sont plus relevés: la strie préscutellaire part de la base de la 2e strie et non pas d'un gros

point situé au dessous. Le prosternum du ♂ n'est point ponctué et le dernier segment abdominal porte de chaque côté un seul point pilifère.

En résumé, cette espèce diffère :

1° de l'*A. Basillaris* en ce que le prosternum du ♂ est lisse, le corselet est plus long, moins rétréci en avant, les angles antérieurs sont saillants et les stries sont à peine ponctuées ;

2° de l'*Impunctícollis*, en ce qu'elle est plus convexe, moins large, le corselet et ses angles postérieurs autrement conformés, a les stries plus profondes et n'a pas de gros point à la base de la strie préscutellaire.

3° des *Littoralis* Mann., *inepta* Lec., *polita* Lec. et *convexa* Lec. par les angles antérieurs de son corselet qui sont avancés.

Je n'ai vu que deux ind. ♂ dans la coll. de M. de Chaudoir, où ils sont étiquetés : (*Etats-Unis, Guex.*).

L'un d'eux a les élytres assez fortement rétrécies en arrière.

22. *A. Confusa.* Le Conte. Geod. col. p. 89. 2. Proc. Philad. 1856. 352. 31.

Montagnes rocheuses. Nebraska, où elle semble être commune.
1 seul ex. ♂.

23. *A. Convexa.* Le Conte, Geod. col. p. 91. 7. et Proc. Philad. 1856. 352. 33.

Lac supérieur.
2 ind. dont l'un du Labrador, provenant de la coll. Dejean.

24. *A. Polita.* Le Conte, Geod. col. p. 92. 8. Proc. Philad. 1856. p. 352. 32.

Nebraska et Nouveau Mexique.
2 ex. dont l'un des bords du Ruper, Baie d'Hudson.

25. *A. Nitida.* Sturm. Ins. VI, 35. 17.

Zimmerm. 2e D. n° 5. — Schaum. D. J. I. 525. 22.
Dejean confondait cette espèce avec la *communis*.

26. *A. Communis.* Panzer. — Schaum. D. J. I. 526. 24.

27. *A. Vulgaris.* Panzer. — Dej. spec. III, 463. 5.
Lunicollis. Schiödte. — Schaum. D. J. I. 528. 26.

Je ne puis pas admettre avec M. Schaum qu'il faille renoncer à laisser à cet insecte le nom sous lequel il a été décrit par Panzer, Illiger, Dejean, Erichson, etc., et sous lequel tout le monde le connaît. Puisqu'il y a des doutes sérieux sur son identité avec le *Carabus Vulgaris* de Linné et que les *Harpalus* et *Amara Vulgaris* de Gyllenhall, Duftschmidt et Sturm sont des espèces différentes, il suffit d'indiquer celle-ci par l'auteur dont la description ne laisse pas de doute, et de dire *A. Vulgaris.* Panzer.

L'*A. Assimilis* Chaud. (B. M. 1844. 446) est à peine une variété de la *vulgaris,* (cf. Berl. E. Z. 1861. 198). Les angles postérieurs du corselet sont plus arrondis et la base est plus faiblement quoique distinctement ponctuée.

28. *A. Nigrita.* Chaud. B. M. 1844. 445.
C'est une bonne espèce dont j'ai vu 5 ind. pris à Irkutsk (Sibérie.)

29. *A. Curta.* Dej. Spec. III. 468. 9. — Schaum. D. J. I. 527. 25.

Cette espèce est parfois noire en dessus. Elle est très-commune à Ostende, surtout au printemps; elle se trouve aussi dans la vallée de la Meuse. Les exemplaires de M^r^ de Chaudoir proviennent de la France, de la Suisse, de la Styrie et de la Volhynie.

30. *A. Trivialis.* Gyll. — Dej. Spec. III. 464. 6. — Schaum D. J. I. 531. 29.

A. Persica. Chaud. B. M. 1842. 827. 70. et 1844. 430.
France, Belgique, Allemagne, Espagne, Crimée, Caucase, Arménie, Perse, Sibérie.

L'insecte indiqué dans le Species comme venant de l'Amérique du Nord n'appartient pas à cette espèce, mais il est trop incomplet pour qu'il soit possible de décider ce qu'il est. Dans tous les cas, ce n'est pas l'*A. Impunctícollis,* pas plus que l'*A. Fallax* ou *Littoralis.*

51. *A. Proxima.*

Intermedia. Chaud. Car. Caucas. p. 159. 212.

5 ex. Georgie méridionale.

J'ai dû changer le nom donné à cette espèce par Mr de *Chaudoir*, une autre espèce d'*Amara* ayant déjà été décrite sous ce nom en 1844 par Mr Motschulsky. (*L. Intermedius.* Ins. Sib. 175).

52. *A. Spreta.* Dej. Spec. V. 791. 64.—Schaum D. J. I. 530.28.

Très-commune dans les parties sablonneuses de la Belgique, assez souvent noire. Les individus de la coll. Dejean viennent du nord de l'Allemagne et de la Volhynie.

53. *A. Famelica.* Zim. — Schaum. D. J. I. 529. 27. et Berl. E. Z. 1861. 205. 28.

Les exemplaires de la collection Dejean étaient confondus avec l'*A. Vulgaris.* Cette espèce ne se rencontre en Belgique que dans les terreins tourbeux des montagnes à l'est du pays, vers la frontière de Prusse.

54. *A. Protensa.* N. Sp.

Long. 8 $^1/_2$. 9. — Lat. 4. 4 $^1/_4$ mill.

D'un noir assez terne, ayant parfois un léger reflet bronzé; le 1er article des antennes et au moins l'extrémité du 2e sont fauves. La tête est assez petite, un peu ridée; les deux fossettes en avant des yeux sont peu distinctes.

Le corselet est convexe, plus large que long, rétréci aux angles antérieurs qui sont déprimés, saillants, mais peu aigus. Les côtés ne sont pas arrondis après le milieu et ils tombent droit sur la base. Le rebord basal est légèrement bisinué; les angles postérieurs sont droits, mais leur extrémité est obtuse; la base, complètement lisse, n'est déprimée que vers les côtés; l'impression interne est formée par une ligne droite assez courte; l'impression externe est assez large, presqu'arrondie, mais très-peu profonde: le sillon longitudinal et l'impression transversale antérieure sont très-peu marqués. Les élytres sont en ovale très-allongé, plus large aux épaules que la base du corselet, distinctement rétré-

cies après le milieu; les épaules sont relevées; le dessus des élytres est convexe; les stries sont très-fines dans toute leur étendue, à peine distinctement ponctuées; les intervalles sont plans; la strie préscutellaire est longue; elle part de la base de la 2e strie et se réunit en arrière à la strie marginale; la série de gros points sur la 8e strie est interrompue au milieu. En dessous, le corps est complètement lisse; le dernier segment abdominal porte de chaque côté, chez la ♀ deux points pilifères assez rapprochés.

Bords du fl. Ruper, Baie d'Hudson. 2 ind. ♀.

33. *A. Acuminata.* Payk. — Schaum. D. J. I. 532. 30.

Eurynota. Panz. Dej. Spec. III. 458. 1.

3e Dn.

Zimmermann place 4 espèces dans la 3e Dn de son 3e groupe.

1° *Levis* st. qui ne paraît pas différer de la *Familiaris.* Voy. Schaum D. i. I. 533. 31.

2° *Familiaris.* Duft.

3° *Angustata.* Say. qui appartient au 1er groupe. (Voy. ci-dessus.)

4° *Lucida.* Duft. (Gemina Zim.)

Il ne reste donc que les 2e et 4e auxquelles je pense qu'il faut ajouter *A. Anthobia* Villa.

36. *A. Familiaris.* Duft. — Dej. Spec. III. 469. 10. — Schaum D. J. I. 533. 31.

Cette espèce est des plus communes dans toutes les parties de l'Europe. Mr de Chaudoir en a du Caucase et de l'Algérie.

L'*A. Perplexa* Dej. est une variété qui a le corselet ponctué au milieu et les points des stries sur les élytres plus gros. La coll. Dejean en renferme un ind. de Volhynie. J'en ai pris également un dans les montagnes à l'est de la Belgique.

37. *A. Anthobia* villa col. Europ. dupl. 33. n° 5.

Mr Schaum (D. J. I. 533. 31.) réunit cet insecte à l'*A. Familiaris;* je pense que c'est à tort. J'en ai sous les yeux trois exemplaires : l'un dans la coll. de Mr de Chaudoir, et venant de Milan : les deux autres dans ma propre collection : j'en ai reçu

un de Mr l'Abbé *Marietti,* qui était conservateur du Musée de Milan; l'autre a été pris aux environs de Rome. Ces trois individus diffèrent de l'*A. Familiaris* par les caractères suivants : les yeux sont plus saillants; le corselet est plus étroit en arrière; les impressions de la base ne sont pas ponctuées; les angles antérieurs ne sont pas proéminents; la strie préscutellaire commence plus bas que la base par un gros point, ce qui n'est pas le cas dans la *familiaris* où elle part, soit de la base de la 2e strie, soit un peu plus bas, mais toujours sans gros point à sa naissance.

Elle diffère de l'*A. Lucida* par sa taille beaucoup plus grande, égale à celle de l'*A. Familiaris* et par son corselet moins rétréci en avant.

38. *A. Lucida* Duft. — Schaum. D. J. I. 554. 32.

Gemina Zim.

Dejean avait réuni cette espèce à la *Familiaris.*

4e GROUPE. Zim.

La strie préscutellaire ne commence par un gros point que dans la dernière espèce de ce groupe.

39. *A. Tibialis* Payk. — Dejean. Spec. III. 471. 12. — Schaum. D. J. c. I. 554. 33.

40. *A. Basillaris* Say. — Le Conte Proc. Philad. 1856. 551. 22.

Lucidula Dej. Sp. III. 477. 19.

41. *A. Sallei.* Chaud. (coll.)

Voisine de la précédente; moins brillante; yeux plus saillants; antennes entièrement testacées; corselet plus carré; impressions plus faibles et non ponctuées; stries non ponctuées.

Mexique. La collection de Chaudoir n'en renferme qu'un seul individu sous le nom que j'ai conservé. Il n'est pas impossible que ce soit l'espèce indiquée, mais non décrite, par Zimmermann sous le nom d'*A. Orizabae.*

42. *A. Insignis* Dej. Spec. V 796. 71.

Mannerh. B. M. 1843. p. 208. 68.
Le Conte. Proc. Philad. 1856. 350. 21.

Tous les exemplaires que j'ai sous les yeux viennent de Californie; il paraît cependant qu'on a trouvé cet insecte au Mexique. (Voy. Ménétr. in Bull. Acad. St. Petersb. 1843 p. 60. 43.)

CELIA. Zim.

Chez aucune *Celia*, sauf dans les C. *Biarticulata*, *Abbreviata*, *Musculus* et *Grandicollis*, il n'existe un gros point à la base de la strie préscutellaire.

Toutes ont la pointe sternale longée par un sillon; il n'existe deux points pilifères que dans les espèces appartenant aux 5e et 6e groupe.

1er GROUPE. Zim.

43. *C. Ingennua* Duft. — Dej. Spec. III. 498. 41. — Schaum. D. J. I. 536. 35.

Suède, France méridionale, Espagne.

Var. *Ruficornis*. Dej. Spec. III. 500. 43.

Ne diffère du type que par son corselet un peu plus étroit et à côtés plus parallèles. La collection de Mr de Chaudoir en renferme 3 ex. indépendamment de celui qui a été décrit par Dejean.

J'en possède un, que Mr Solier m'a envoyé jadis sous le nom de *Ruficornis* et comme identique à celui qu'il avait adressé à Dejean. Il tient le milieu et forme la transition complète entre le type et la variété.

44. *C. Rufo-aenea* Dej. Spec. III. 499. 42. Espagne.

2e GROUPE. Zim.

45. *C. Complanata* Dej. Spec. III. 496. 39. Dalmatie.

46. *C. Fusca* Dej. Spec. III. 497. 40. Schaum. D. J. I. 537. 36.
et
47. *C. Cursitans* Zim. — Schaum. D. J. I. 538. 37.

Ces deux espèces ont souvent été confondues et même, tout récemment, (Berl. E. Z. 1864. 15) Mr Kraatz s'est demandé si elles ne constitueraient pas de simples variétés d'une seule espèce, de même que les *C. Properans* et *Fuscicornis* de Zimm.

Malgré les différences que présentent parfois la coloration, la taille, la forme du corselet, les stries des élytres, je pense qu'il existe des caractères fixes moyennant lesquels les deux espèces peuvent être parfaitement reconnues.

J'ai sous les yeux les types de Dejean de l'*A. Fusca*, ainsi que d'autres individus qui s'y rapportent exactement.

La taille ordinaire de la *fusca* dépasse un peu celle de la *Cursitans*. La 1re est plus ou moins brunâtre; la 2e est plus métallique, plus brillante; la *Fusca* a les palpes et les antennes testacés; chez la *Cursitans* les palpes sont plus ou moins couleur de poix, les 1ers articles des antennes seulement sont testacés, les autres sont bruns. La tête est un peu plus large chez la *Fusca*. Le corselet, dans cette espèce, est plus convexe en avant, les angles antérieurs sont beaucoup plus déprimés, plus largement arrondis; les côtés vont en s'élargissant jussqu'à la base où ils sont de la largeur des épaules; dans la *Cursitans*, leur plus grande largeur est avant le milieu et ils se rétrécissent distinctement vers la base; les bords latéraux du corselet sont plus déprimés. — Dans la *Fusca*, les angles postérieurs sont parfois un peu prolongés, mais plutôt en arrière qu'extérieurement comme c'est le cas dans la *Cursitans*.

La forme des élytres est très-différente dans les deux espèces : chez la 1re, elles forment un ovale large et régulier, dans la 2e, elles sont plus longues, moins larges au milieu, même chez la ♀. Les intervalles sont plans chez la *Fusca*, convexes et un peu inégaux chez la *Cursitans*. Dans la *Fusca*, le rebord basal est moins déprimé au milieu et de là il se relève distinctement jusqu'aux épaules ; dans la *Cursitans*, il se porte plus directement de la base de la 4e strie jusqu'aux épaules qui sont beaucoup plus saillantes.

48. *C. Municipalis* Duft. — Schaum. D. J. 539. 83.

Modesta Dej. Spec. III. 482. 24.

Les ex. de Dejean viennent de France et de Volhynie. Ceux

de la coll. de Chaudoir viennent particulièrement de la Russie et du Caucase.

D'après des types de Motschulsky, j'ai pu me convaincre que son *Amara Obscuricornis* B. M. 1859. 223 et ses *Celia Viridescens* (ined.) et *Ruthenica* (ined.) sont de petits ex. de la présente espèce.

49. *C. Ambulans* Zim. (Faunus I. 22. 4.)

Transcaucasie. (Coll. de Chaudoir.)

Je l'ai reçue de M^r^. Motschulski sous le nom de *C. Inderiensis* et comme venant des bords du lac Indersch. M^r^ de Chaudoir en possède également un individu de la même provenance.

3^e^ GROUPE. Zim.

1^re^ D^on^.

50. *C. Interstitialis*. Dej. III. 472. 13. Le Conte (l. c.) p. 353 n° 36.

Kamtschatka. La couleur varie du bronzé au cuivreux, au vert et au noir.

51. *C. Patruelis* Dej. Spec. V. 793. 67.

Kamtschatka. Très-distincte de la précédente par sa taille plus grande (10 mill.— La *C. Interstitialis* n'en a que 8.) et surtout par les angles antérieurs du corselet qui sont proéminents.

L'*A. Inaequalis* (Kirby Faun. Bor. Amer. p. 58 n° 52.) appartient à la présente espèce ou à la précédente, mais comme Kirby ne parle pas des angles antérieurs du corselet, le point reste d'autant plus douteux que l'on n'est pas certain de l'espèce à laquelle il compare son *Inaequalis*.

52. *C. Biarticulata* Motsch. Ins. Sib. 188. 330. — Schaum. Berl. E. Z. 1861. 205.

Sibér. mérid. transbaïcal.

Outre les ex. de la coll. de Chaudoir, il s'en trouve deux étiquetés par Dejean du nom d'*A. Spreta*.

53. *C. Erratica*. Duft. — Schaum. D. J. I. 540. 39.

A. Punctulata. Dej. Spec. III. 472. 14.

Les ex. de la coll. Dejean viennent de l'Amérique du Nord. Ceux de Mr. de Chaudoir sont du Nord de l'Allemagne, de Suisse, de Trieste, du Caucase et du Kamtschatka.

2 ex. des Alpes de la Mongolie sont étiquetés par *Motschulski Amara Convexicollis.* Leur corselet est un peu plus court, plus large, plus arrondi sur les côtés, avec les angles postérieurs beaucoup moins prononcés; le bord antérieur est plus échancré et les angles antérieurs plus saillants. Les stries des élytres sont plus fines et moins ponctuées. Je ne puis cependant y voir qu'une des nombreuses variétés de la *C. Erratica.*

2e Dion.

54. 55. Zimmermann a composé cette division de deux espèces mexicaines : *Moerens* et *Lugens:*

La 1re, de 4 1/2 à 5 lignes de longueur, de 2 à 2 1/2 lignes de largeur, est noire, lisse, avec les élytres à *peine striées;*

La 2e *beaucoup plus étroite, noire et ressemblant extrêmement à l'A. Trivialis.*

La *C. Moerens* est certainement le même insecte que celui qui figure dans la coll. Dejean sous le nom de *Chevrolatii.* J'en ai sous les yeux 15 individus, dont 2 appartenant à Mr. Chevrolat et 6 à Mr. Dohrn; ils varient quelque peu, en ce que certains d'entre eux ont les angles antérieurs du corselet un peu plus avancés, la base plus fortement sinuée, les angles postérieurs moins réfléchis et plus arrondis; le 1er article des antennes est plus ou moins rougeâtre.

Quant à la *C. Lugens*, ce n'est qu'avec hésitation que j'y rapporte un insecte dont Mrs. de Chaudoir et Chevrolat possèdent chacun un ex. Il est de la couleur de la *Moerens,* mais moins terne, plus petit, mais à peine moins large; les 3 1ers articles des antennes sont fauves; le corselet est plus large antérieurement ses angles antérieurs un peu plus avancés; les côtés sont un peu plus droits avant les angles postérieurs; mais je ne vois pas *la ressemblance extrême avec l'A. Trivialis* signalée par Zimmermann.

L'examen du type de Zimmermann permettrait seul de vider la question.

4e GROUPE. Zim.

56. *C. Californica* Dej. Spec. III. 474. 16.
Le Conte. (l. c.) p. 354. 38.

Californie. Sonora.

57. *C. Mexicana.* Dej. Spec. V. 792. 66.

Outre les types de Dejean, Mr. de Chaudoir possède de nombreux individus qu'il a reçus de Mr. Sallé.

Cette espèce paraît être fort répandue au Mexique; j'en possède d'Orizaba, d'Oaxaca et de Chiapas. Les exemplaires que j'ai de cette dernière localité ont les stries plus marquées.

5e GROUPE. Zim.

Les espèces qui constituent le 5e Groupe des Celia de Zimmermann ne sont caractérisées que d'une manière tellement sommaire qu'il n'est pas aisé de les distinguer, d'autant plus que la forme du corselet et la ponctuation des élytres sont très-sujettes à varier.

Les *C. Quenselii* (dont la *Monticola* n'est qu'une légère variété), *Sylvicola* et *Remota* (*Remoltestriata*) sont bien connues; mais il n'en est pas de même de la *Tescicola* et de la *Rupicola*. Le seul caractère distinctif entre ces deux espèces consisterait dans les dimensions du corselet qui, dans la 1re, serait « *majusculus* » et dans la 2e « *minusculus.* » Je comprends d'autant moins le sens de ces deux expressions que je les retrouve dans la diagnose des *C. Quenselii* (*thorace minusculo*) et *C. Sylvicola* (*thorace majusculo*) et que le corselet de l'une des ces espèces n'est sensiblement ni plus long ni plus large que celui de l'autre.

Il ne reste donc plus de caractère saillant que les angles antérieurs du corselet qui sont moins avancés dans les *C. Tescicola* et *Rupicola* que dans la *C. Quenselii.*

Je suis porté à admettre que Mr. Motschulski les a bien reconnues dans les deux insectes qu'il a décrits sous ces deux noms

(Ins. de Sibér. p. 190 n^{os} 348 et 349). C'est donc d'après des types de M^{r}. Motschulski, envoyés par ce dernier à M^{r}. de Chaudoir, que je vais indiquer les caractères qui les séparent de l'espèce la plus connue : *C. Quenselii.*

57. *C. Tescicola* (1) Zim. Mon. Amar. G. *Celia* 5^{e} gr. n° 1. — Motsch. Ins. Sib. p. 199 n° 348.

D'un brun plus clair avec un reflet métallique verdâtre; les pattes, les palpes et les antennes sont plus testacés; les yeux sont encore moins saillants; le sommet de la tête est un peu plus ridé. L'insecte est un peu plus grand, un peu plus large; le corselet est un peu moins convexe, plus rétréci à la base; les angles antérieurs sont moins aigus; toute la base est ponctuée, ce qui rend les deux impressions beaucoup moins distinctes. Les élytres, plus planes, sont plus larges en arrière; les épaules ne dépassent pas la base du corselet; les stries sont plus profondes, plus fortement ponctuées et les intervalles sont moins plans; la série de gros points sur la 8^{e} strie est moins interrompue.

Steppes des Kirghises.

59. *C. Rupicola.* Zimm. ib. n° 2.
Motsch. ib. n° 349.

Par sa forme raccourcie, cette espèce a un peu l'aspect de l'*A. Ovata;* elle est beaucoup plus courte que la *C. Quenselii;* elle est de la couleur de la *Tescicola:* la tête est plus large; les deux premiers articles des antennes sont plus clairs que les suivants; le corselet est plus convexe, beaucoup plus rétréci antérieurement et ses côtés sont plus arrondis; les angles antérieurs, presqu'aussi avancés, sont moins aigus; la dépression le long des côtés est plus prononcée, surtout en avant; les angles postérieurs sont réfléchis; les deux impressions de la base sont un peu moins distinctes et plus ponctuées; les points s'étendent même sur le milieu de la base; les élytres sont

(1) Toutes les espèces de ce groupe portent deux points pilifères à l'extrémité de la pointe sternale.
La *C. Rupicola* semble faire exception.

beaucoup plus larges, plus courtes, plus rétrécies à l'extrémité; les stries sont plus profondes et plus ponctuées; la strie préscutellaire part de la base entre les 1re et 2e stries et non de la base de la 2e; le dernier segment de l'abdomen est fauve, au moins à l'extrémité.

Sibérie Orientale.

Mr. de Chaudoir possède un type de la *C. Microcephala* (Motsch. Ins. Sib. p. 209.) sauf la couleur, qui est noire, et la tête moins large, je ne vois rien qui distingue cet insecte de la *C. Rupicola*.

60. *C. Quenselii* Schoenh. — Dej. Spec. III. 481. 23. — Schaum. D. J. I. 542. 40.

Monticola. Zimmerm. — Dej. Spec. V. 794. 68.

Un exemplaire du Caucase, qui se trouve dans la coll. de Chaudoir, représente plus fidèlement l'espèce que plusieurs des ex. figurant dans la coll. Dejean : ces derniers sont plus ou moins aplatis au dessus des élytres, tandis que celui du Caucase est parfaitement convexe.

Mr. de Chaudoir possède un ind. de Lapponie dont le corselet est un peu plus étroit, avec les côtés plus parallèles; et un autre du même pays, envoyé par Mr. de Mannerheim sous le nom de *C. Floricola:* ce dernier, plus étroit, a le corselet un peu plus rétréci en avant. — Ces deux insectes ne sont que des var. de la *Quenselii*.

61. *C. Sylvicola*. Zimm. — Schaum. D. J. I. 544. 41.

62. *C. Remotestriata*. Dej. Spec. III. 473. 15. *Remota*. Zimm.

Amérique Russe. Ounalaschka.

Les deux ex. (♂ et ♀), types de Dejean, sont en mauvais état, mais ils présentent fort distinctement les caractères essentiels de cette espèce; tout l'insecte est plus étroit que la *C. Quenselii:* le corselet est plus long, moins large surtout en avant; le bord antérieur est moins échancré; les côtés tombent plus

droit sur la base; ils ne sont largement déprimés que depuis le milieu jusqu'à la base; les élytres sont plus planes en dessus, les stries beaucoup plus fines, plus régulières et à peine distinctement ponctuées; les intervalles complètement plans et d'une teinte mate; (c'est, en partie, à cette absence de convexité qu'est due la plus grande largeur des intervalles); les épisternes métathoraciques sont très-faiblement ponctués.

Tous ces caractères ne restent cependant pas réunis dans tous les individus. La coll. de Chaudoir en renferme plusieurs où les bords du corselet sont déprimés jusqu'à la partie antérieure.

La *C. Indistincta* Mannerh. (B. M. 1853. p. 45 n° 36) est une variété dont le corselet est un peu moins étroit antérieurement et dont les intervalles sont un peu moins plans. M^r^. de Chaudoir en possède un ind. de Kadjak.

Je ne connais que par la description la *C. Gibba* Le Conte (Proc. Philad. (l. c.) p. 355 n° 43); elle me paraît être également une simple variété de la *Remotestriata*.

63. *C. Relucens* Mannh. B. M. 1853. p. 46 n° 37.

Bien qu'assez voisin de la *C. Remotestriata*, cet insecte me paraît constituer une espèce distincte. La couleur est un brun bronzé très-brillant; la taille est un peu plus courte; le corselet moins convexe, a ses côtés déprimés jusqu'au delà du milieu; les angles antérieurs sont plus avancés et plus aigus; le sillon longitudinal est moins profond; le milieu de la base est plus déprimé : les stries sont beaucoup plus profondes, plus inégales et plus fortement ponctuées; les intervalles sont moins larges et convexes; les tibias intermédiaires et postérieurs sont plus arqués.

Kadjak.

6^e^. GROUPE. Zim.

L'unique espèce de ce groupe a, comme celles du groupe précédent, deux points pilifères à l'extrémité de la pointe sternale.

64. *C. Saxicola*. Zimm.

2 ind. venant de la coll. Falderman.

8e GROUPE. Zim.

65. *C. Aurata* Dej. Spec. III. 475. 17. Le Conte (l. c.) p. 355 n° 49.

Californie.

66. *C. Bifrons.* Gyll. — Dej. Spec. III. 485. 27. — Schaum. D. J. I. 546. 43.

67. *C. Abbreviata.* Chaud. B. M. 1842. 828 et 1844. 430.

A la description de Mr. de Chaudoir je dois ajouter que les fossettes externes de la base du corselet sont arrondies comme chez les *Leiocnemis* et que la strie préscutellaire, commençant par un gros point, ne touche, ni à la base, ni en arrière, la 1re ou la 2e strie.

1 ♀ Astrabad.

9e GROUPE. Zim.

68. *C. Rufocincta. Sahlb.— Dej.* Spec. III. 484. 26.— *Schaum.* D. J. I. 547. 44.

Grandicollis. Zim.

Mr. de Chaudoir possède un certain nombre d'ex. venant d'Arménie qui ne diffèrent que par leur taille plus petite.

Laevigata Motsch. J. S. 190. 350. (Var. thor. impunct.)

69. *C. Subaenea Lec.* Lake sup. 208. — Proc. Philad. 1856. 355 n° 45.

États-Unis. 1 ex. envoyé par Mr. Le Conte à Mr. de Chaudoir.

70. *C. Acutangula.* Chaud. (coll.)

Brunnea, nitida, corpore subtus, labro, palpis, antennis pedibusque testaceis. Pronotax brevis, transversus, antice posticeque angustatus, lateribus rotundatis, angulis anticis prominulis, posticis subrectis apice acutiusculo; basi rotundatim bifoveolato, foveolis parce punctatis—Elytra ovata, punctato striata.

Long. 7. Lat. 3 mill.

D'un brun brillant devenant plus clair sur les côtés du corselet et des élytres. La tête est assez large; les yeux, sans

être aplatis, sont cependant peu saillants. Le corselet, assez convexe, est plus large que long, presqu'aussi rétréci à la base qu'à l'extrémité; les côtés sont régulièrement arrondis; le bord antérieur est tronqué, ses angles sont déprimés, saillants, arrondis à leur extrémité; les angles postérieurs sont un peu plus ouverts que droits; leur extrémité est assez aiguë; le bord basal est très-légèrement échancré au milieu de chaque côté; la base porte deux fossettes assez larges, presqu'arrondies et faiblement ponctuées; le sillon longitudinal est peu profond au milieu.

Les élytres sont ovales, un peu plus larges à leur base que le corselet, sinuées avant l'extrémité, assez profondément striées; les stries sont un peu plus fortes à l'extrémité; leurs points quoiqu'assez gros, sont peu distincts; la strie préscutellaire est longue; elle part de la base de la 2e strie et se réunit en arrière à la strie suturale.

Un seul ind. ♂ coll. de Chaudoir et indiqué comme venant des États-Unis.

Par l'avancement des angles antérieurs, cette espèce se rapproche de la *C. Subaenea* Lec., mais elle est très-différente par son corselet beaucoup plus court, plus large, moins convexe, surtout sur les bords, par sa strie préscutellaire qui n'est pas libre à son extrémité, etc.

71 . *C. Chalcea.* Dej. Spec. III 476. 18.

États-Unis. 2 types de Dejean, un de chaque sexe.

L'insecte décrit sous ce nom par Mr. Le Conte (Proc. Philad. 1856 p. 351 n° 23) ne peut pas être l'espèce de Dejean; cette dernière est bien positivement une *Celia*, tandis que Le Conte place la sienne parmi les *Amara* proprement dites, avec les tibias postérieurs des ♂ pubescents.

Dans la coll. de Chaudoir se trouvent plusieurs individus (dont l'un porte une étiquette de Dejean avec le nom de *Hybrida*) presque noirs, un peu plus larges que le type ♂ de la *Chalcea*, ayant le corselet plus étroit en avant, les élytres plus courtes et plus larges, leurs stries plus fortement ponctuées et les deux impressions de la tête plus profondes et plus arrondies. Mais d'autres ex. forment le passage entre cette variété et le type de la *C. Chalcea*.

72. *C. Rubrica* Haldem. — Le Conte (l. c.) p. 355 n° 44.

États-Unis. Plusieurs individus, entre autres l'un envoyé sous ce nom par Mr. Le Conte.

73. *C. Musculus* Say. — Dej. Spec. III. 477. 20 (errore. *musculis*). — Le Conte (l. c.) p. 355. 46.

États-Unis et Texas.

La *C. Contempta* Lec. Geod. col. p. 95 n° 3 est à peine une variété de cette espèce (voy. Le Conte Proc. Philad. 1856 p. 355 n° 46.)

74. *C. Texana.* Chaud. (coll.)

Très-voisine de la *C. Musculus.*

Les yeux sont moins saillants; le corselet est plus large en avant, les angles postérieurs sont un peu plus obtus; les deux fossettes de la base sont plus rapprochées l'une de l'autre et l'espace entre elles est parsemé de quelques points; les élytres sont plus courtes, moins rétrécies postérieurement, moins fortement ponctuées; la strie préscutellaire est moins longue.

2 ind. rapportés du Texas par Mr. Sallé.

Bien que rapprochée de la *C. Musculus*, elle ne peut être réunie ni à cette espèce ni à la *C. Contempta* qui a aussi le corselet un peu moins rétréci en avant.

7e GROUPE. Zim.

75. *C. Infima* Duft. — Dej. Spec. III. 491. 33. — Schaum. D. J. I. 545. 42,

Granaria Dej. Spec. III. 490. 32.

Les deux insectes décrits par Dejean appartiennent évidemment à une seule et même espèce.

Un individu, venant d'Autriche, est étiqueté par Dejean du nom d'*A. Confusa*: il est récemment transformé, brun; la base du corselet est plus fortement ponctuée, ce qui rend les deux impressions moins distinctes; les points des stries sur les élytres sont plus gros; la strie préscutellaire est un peu plus longue.

ACRODON Zimm.

76. *A. Brunneus* Gyll. — Dej. Spec. III. 483. 23.— *Schaum.* D. J. I. 518. 45.

A. Lapponica Dej. Spec. V. 795. 69.

Cette espèce varie quelque peu dans sa taille, dans la forme et la ponctuation du corselet et dans la ponctuation des stries des élytres.

Un des ex. de Dejean porte 3 points pilifères ♀ de chaque côté de l'anus.

L'ex. de l'*A. Lapponica* D. n'est ni plus ni moins ponctué à la base du corselet que la *Brunnea;* seulement, les deux impressions sont moins profondes; la strie qui est au fond de l'impression interne est tout aussi distincte que d'habitude. Un ex. ♀ de la *Brunnea* fesant partie de la coll. Dejean est complètement identique.

Il y a dans la coll. de Chaudoir un ind. ♂ rapporté de Ustbuchbarmin par Kindermann. Ses élytres sont noires, les bords du corselet bruns. Il est un peu plus large que l'*A. Brunnea.* Le corselet est plus rétréci en avant et moins aux angles postérieurs qui sont plus droits, bien qu'arrondis à leur extrémité; la base du corselet et les stries des élytres sont plus fortement ponctuées.

La même collection possède un autre ind. ♀ rapporté de Kenaï par Holmberg, et étiqueté *C. Amplicollis* Mann. Il se rapporte bien à l'insecte décrit sous ce nom B. M. 1853. 47 n° 38. Il diffère de l'*A. Brunnea* en ce qu'il est un peu bronzé; que le corselet est plus court, plus large, surtout au milieu et plus arrondi sur les côtés; les points des élytres sont moins distincts.

Je ne puis voir dans ces deux insectes que de simples variétés de l'*A. Brunneus.*

LEIOCNEMIS Zimm.

De tous les genres établis par Zimmermann, le genre Leiocnemis est celui qui manque le plus d'unité; il semble s'être formé de toutes les espèces qui ne pouvaient figurer autre part.

Un corselet rétréci en arrière, les tibias postérieurs des ♂ non pubescents intérieurement, tels sont les caractères communs aux *Curtonotus* et aux *Leiocnemis;* mais chez les premiers, les tibias intermédiaires des ♂ sont bi-ou tridentés en dessous, tandis que chez les autres, ils sont inermes.

Or, ce caractère tend à disparaître chez quelques *Curtonotus*, tandis que certaines *Leiocnemis* ont les tibias intermédiaires assez distinctement dentés en dessous.

La forme générale des *Leiocnemis* est un ovale court; le corselet transversal est, ou arrondi postérieurement, ou avec des angles postérieurs obtus. Le dernier article des palpes labiaux est plutôt fusiforme qu'oblong; il s'atténue fortement vers l'extrémité qui est presque pointue et seulement tronquée à l'extrême pointe : la ligne de gros points sur la 8e strie des élytres n'est pas complètement interrompue au milieu, comme c'est le cas chez les *Curtonotus;* la strie préscutellaire est ordinairement longue et ce n'est que fort rarement qu'elle porte un gros point à sa base.

Les épisternes métathoraciques sont allongés. On y a cependant fait entrer des insectes de forme allongée, à corselet cordiforme et à angles saillants, à strie préscutellaire courte, et avec les épisternes métathoraciques brièvement trapézoïdaux. (*A. Puncticollis, Pyrenaea,* etc.)

D'un autre côté, on a dû joindre aux *Curtonotus* des espèces à palpes faiblement tronqués, à strie préscutellaire courte, ayant sur la 8e strie une ligne de points non interrompue, et ne présentant pas des épisternes allongés (*A. Helopioides, Nobilis, Spectabilis, Cardui.*)

On a donc altéré l'unité de chacun des deux genres et l'on a séparé des insectes manifestement voisins, tels qu'*A. Cardui, Pyrenaea* etc.

Le seul parti à prendre me paraît être de créer un nouveau genre qui se placera comme intermédiaire entre les *Leiocnemis* et les *Curtonotus* et qui sera parfaitement homogène dans sa composition : ses caractères seront, au reste, parfaitement tranchés.

Toutefois, il ne faut pas se dissimuler que cette élimination ne suffira pas pour donner une homogénéité complète à ce qui restera du genre *Leiocnemis;* à côté d'espèces courtes, convexes,

à corselet transversal, à strie préscutellaire et à épisternes allongés, on continuera à en voir d'autres à élytres presque cylindriques, ou bien aplaties, à corselet cordiforme, ou n'ayant qu'une strie préscutellaire presqu'indistincte et des épisternes carrés.

Voici les *Leiocnemis* signalées par Zimmermann.

1er *Groupe.*

1. Pyrenaea Dej.
2. Puncticollis Dej.
3. Cordicollis Zim.

2e *Groupe.*

4. Crenata Dej.
5. Elongata. Sturm.

3e *Groupe.*

6. Alpicola Dej.
7. Cuniculina Dej.

4e *Groupe.*

8. Sabulosa Dej.
9. Dalmatina Dej.

5e *Groupe.*

10. Eximia Dej.

6e *Groupe.*

11. Glabrata Dej.

7e *Groupe.*

12. Nobilis Dej.

Les 1re, 2e, 6e, 7e et 12e passent au genre *Leirides;* la 5e est identique à la 8e (voy. Sturm cat. 1843 p. 29.)

Il en reste donc 6 auxquelles je vais en ajouter 21. Ce nombre est certainement destiné à s'accroître par de nouvelles découvertes. L'Espagne semble être la patrie de prédilection des *Leiocnemis*, et ce pays, rendu plus abordable par les chemins de fer, ne tardera pas à livrer ses richesses entomologiques aux naturalistes.

En général la pointe sternale chez les *Leiocnemis* est sillonnée à l'extrémité et porte deux points pilifères.

Les espèces qui font exception sous ces deux rapports sont : *Avida*, *Glabrata*, *Ooptera* et *Rotundicollis*.

Les *Sabulosa*, *Arenaria* et *Crenata*, sont munies d'un sillon, mais les points pilifères manquent.

77. L. *Cottyi*, Coq. Ann. Soc. ent. de Fr. 1858 p. 77.

Long. 6 $^1/_2$ — Lat. 3 mill.

Flavo-brunnea, palpis, antennis pedibusque testaceis. Prothorax transversus, antice truncatus, angulis anticis lateribusque rotundatis, angulis posticis obtusis; basi foveola oblonga profunda atque modice punctulata, punctoque versus angulum notata. Elytra ovata, leviter striata, striis postice subprofundioribus, subtilissime punctulatis; striola praescutellari brevi; humeris subelevatis, vix rotundatis; foveolarum serie in stria 8ª *in medio interrupta.*

La couleur générale est un brun un peu plus fauve, devenant beaucoup plus clair sur les côtés et la base des élytres ainsi que sur la marge du corselet; le dessous du corps, les palpes, les antennes et les pattes sont testacés.

Les palpes ont leur dernier article mince, en ovale très-allongé, très-atténué après le milieu, distinctement recourbé en dedans vers l'extrémité; la pointe seule est tronquée. La tête porte, entre les antennes, deux impressions linéaires, lisses et peu profondes, mais très-distinctes. Les yeux sont peu saillants. Les antennes n'atteignent pas la base du corselet. Celui-ci est très-court, transversal, tronqué en avant, sinué à la base; ses angles antérieurs, arrondis, sont très-déprimés, ce qui le fait paraître aussi large à la base qu'à l'extrémité; les côtés forment un arc régulier jusqu'aux angles postérieurs qui sont très-ouverts et presqu'arrondis. Le rebord marginal est assez relevé, surtout en arrière, mais il est fort étroit. De chaque côté de la base et un peu plus près du bord extérieur que du centre, on voit une impression dont le fond est linéaire et qui s'élève jusqu'au tiers de la hauteur du corselet; elle est entourée de quelques points assez petits, plus nombreux intérieurement et qui n'atteignent pas le milieu de la base. Près

de chacun des angles postérieurs, on distingue une fossette très-petite et presque ronde. La base est assez fortement déprimée entre les deux impressions linéaires. La ligne longitudinale est assez profonde, sauf à ses deux extrémités. Les élytres sont peu convexes, larges, ovales, non sinuées sur les côtés; le rebord basal, déprimé au milieu, se relève jusqu'aux angles huméraux et forme avec le rebord marginal un angle presque droit. Les stries sont fines et peu profondes, très-faiblement ponctuées : elles sont cependant un peu plus profondes vers l'extrémité; la 7e strie atteint distinctement l'épaule; la strie préscutellaire est courte. La ligne de gros points sur la 8e strie est interrompue au milieu. Les épisternes métathoraciques sont allongés, striés intérieurement, non ponctués. Les tibias sont fortement épineux.

J'ai vu dans la collection de Mr. de Chaudoir 6 individus venant d'Algérie. Chez l'un d'eux, les angles postérieurs du corselet sont plus arrondis; ces angles le sont moins, au contraire, chez un 7e individu des Iles Canaries. Mais ces différences sont peu constantes d'après ce que je puis en juger par deux exemplaires de ce dernier pays, communiqués par Mr. Dohrn.

78. *L. Aenescens.* Schaum. (in coll. Chaud.)

Très-voisine de la *L. Cottyi* dont elle pourrait bien n'être qu'une variété. Cependant elle présente des différences qui, sauf examen d'individus plus nombreux de l'*A. Cottyi*, me semblent la distinguer spécifiquement de cette dernière.

Elle est plus petite (Long. 5. Lat. 2 1/2 mill.), d'une couleur plus claire en dessus; les antennes et les pattes sont d'un testacé plus clair; le dessous du corps est d'un brun foncé, parfois noir, ce que je n'ai remarqué chez aucun individu de la *L. Cottyi*, même chez les plus foncés : les angles antérieurs du corselet sont encore plus déprimés et les côtés sont en général plus arrondis vers les angles postérieurs; les impressions de la base sont moins ponctuées et la fossette externe est presque punctiforme : les stries des élytres sont plus fines, mais plus distinctement ponctuées; elles ne s'approfondissent pas vers l'extrémité, et la 7e n'atteint pas la base.

Mr. de Chaudoir en possède 8 individus reçus sous ce nom de Mr. Schaum qui les a pris à Alexandrie (Egypte.)

79. *L. Euphratica.* Chaud. (coll.)

Long. 7 $^1/_2$ Lat. 3 $^1/_2$ M.

Flavo-brunnea, palpis, antennis pedibusque testaceis, femoribus apice tibiisque brunneis. Prothorax transversus, antice leviter emarginatus, angulis anticis deflexis rectis apice obtuso, lateribus subrotundatis, angulis posticis fere rectis; basi late depressa atque foveolis duabus oblongis inæqualibus punctatis notata. Elytra breviter ovata, levissime striata, striis postice subprofundioribus, subtilissime punctulatis, striola praescutellari longa; humeris subelevatis; foveolarum serie in stria 8ª *continua.*

Élytres d'un brun clair ; la tête et le corselet d'un brun de poix ; les palpes, les antennes, les bords du corselet, le dessous du rebord des élytres, les cuisses et les tarses d'un testacé rougeâtre.

Le dernier article des palpes est étroit, acuminé, mais moins aigu à l'extrémité que dans la *L. Cottyi.* Les yeux sont peu saillants, surtout en arrière.

Le corselet est transversal, très-peu rétréci en arrière et y paraissant même plus large à cause de la dépression des angles antérieurs; il est un peu échancré en avant; les angles antérieurs sont droits. Les côtés sont légèrement arrondis jusqu'au milieu et le sont à peine depuis ce point jusqu'aux angles postérieurs : ceux-ci sont un peu plus ouverts que l'angle droit.

La base est tronquée, très-faiblement sinuée, un peu déprimée au milieu; la dépression est beaucoup plus large et plus distincte en approchant des angles ; elle porte de chaque côté deux impressions peu profondes ayant dans leur milieu une ligne enfoncée très-distincte; l'intérieure remonte beaucoup plus haut que l'autre : ces impressions sont assez fortement ponctuées; entre elles, au milieu de la base, on voit quelques points et quelques petites stries longitudinales; le rebord marginal est plus élevé dans sa moitié inférieure.

Les élytres sont larges, en ovale court, peu rétrécies à l'extrémité où elles sont assez fortement sinuées. Le rebord basal se relève légèrement vers les angles huméraux qui sont presque saillants. Les stries sont très-fines et très-légèrement

ponctuées; elles s'élargissent vers l'extrémité et deviennent moins distinctes extérieurement; la 7e n'est pas distincte en dessous de l'épaule. La strie préscutellaire est assez longue; elle part de la base de la 2e strie et se réunit à son extrémité à la strie suturale. La ligne de gros points sur la 8e strie n'est pas interrompue au milieu.

Mésopotamie.

80. *L. Dalmatina* Dej. Spec. III. 495. 38. — *Schaum.* D. J. I. 515. II.

Long. 8. Lat. 3 1/2 M.

Fusco-aenea, palpis, antennis pedibusque testaceis. Oculi subdepressi. Antennae longiores. Prothorax transversus ad angulos anticos vix angustatus, lateribus rotundatis, angulis posticis obtusis; basi tota, foveolisque basalibus fere rotundatis, grosse punctatis, margine antico laevi. Elytra lata, ovata, punctato striata, striola praescutellari longa.

Dalmatie, Styrie, Grèce, Sicile.

81. *L. Eximia* Dej. Spec. III. 494 n° 37.

Long. 7 1/2 — Lat. 3 1/2 M.

Castaneo-picea vel picea. Prothorax transversus, antice leviter emarginatus, angulis anticis porrectis rotundatis; basi in medio emarginata, utrinque sinuata, fortiter punctata, bifoveolata, inter foveolas depressa. Elytra convexiuscula, ovata, humeris elevatis, angulatis, striato-punctata, stria praescutellari longa; foveolarum serie in stria 8 vix interrupta.

D'un brun de poix, tantôt plus clair, tantôt plus foncé; les palpes et les antennes sont d'un testacé un peu rougeâtre. La tête est petite, les yeux sont assez saillants; les palpes ont leur dernier article moins allongé et plus obtus à l'extrémité que dans la *L. Cottyi;* les antennes dépassent de très-peu les épaules. Le corselet est court, transversal, très-arrondi sur les côtés; les angles postérieurs sont arrondis; la base, échancrée au milieu, est sinuée sur les côtés; les deux impressions sont profondes, mais peu régulières; elles sont fo.tement ponctuées, de même que le

milieu de la base qui est déprimé; les points se prolongent tout le long du bord marginal qui est large et relevé; on remarque aussi quelques points le long du bord antérieur.

Les élytres sont en ovale court, peu rétrécies à l'extrémité où elles sont assez fortement sinuées; le rebord basal se relève fortement vers les épaules où il forme avec le bord marginal un angle aigu; elles sont assez profondément striées et fortement ponctuées; les stries sont beaucoup plus profondes vers l'extrémité; la strie préscutellaire est assez longue; à la base elle est réunie à la 2e strie. La série de gros points su la 8e st ie est à peine interrompue au milieu où cependant les points sont plus distants les uns des autres.

La collection de Mr. de Chaudoir renferme un assez grand nombre d'individus de cette espèce : parmi ceux provenant de la collection Dejean, il se trouve une variété venant d'Espagne et signalée dans le *Species*, où la base du corselet ne porte de points que près des deux impressions et dont les stries ne sont pas distinctement ponctuées.

Une seconde variété, étiquetée par Dejean avec un signe de doute, se distingue du type par des élytres notablement plus courtes, plus élargies en avant et dont l'angle huméral est moins relevé; par un corselet un peu plus large en avant et dont les angles postérieurs sont plus marqués et moins arrondis. La fossette interne de la base du corselet n'est pas linéaire comme dans l'*Eximia*, mais plutôt arrondie et limitée en arrière par une petite carène transve sale. L'unique individu de cette variété est une ♀ prise en Espagne.

Dejean avait également mis à part, comme variété de l'*A. Eximia*, deux individus venant du midi de la France et qu'au premier abord, on serait tenté de regarder comme constituant une espèce. Ils sont plus petits, plus étroits, de couleur brune assez claire; le corselet, tout aussi court que chez l'*Eximia*, est beaucoup plus large au milieu et plus régulièrement arrondi; il n'est pas sensiblement rétréci antérieurement et tous ses angles sont à peine distincts. Ces caractères, fort prononcés dans l'un des exemplaires, diminuent chez l'autre qui me paraît faire la transition vers le type.

82. *L. Brevis* Dej. Spec. III. 495. 35.

Long. 7 — Lat. 3 ½ M.

Castaneo-picea. Prothorax transversus, antice subangustatus, lateribus rotundatis, angulis posticis subrotundatis; basi utrinque profunde sinuata, foveolis basalibus laevibus, interna profundiore oblonga, externa vero rotundata. Elytra convexa in dorso subdeplanata, breviter ovata, apice leviter sinuata, humeris subelevatis, striata, striis vix punctulatis, apice profundioribus; foveolarum serie in stria 8ª in medio rarius interrupta.

Voisine de la *L. Eximia*, mais d'une couleur plus claire. Les antennes sont plus longues; les yeux moins saillants. Le corselet est un peu moins large, plus rétréci vers les angles antérieurs qui sont moins saillants; les côtés sont un peu moins arrondis après le milieu; les angles postérieurs sont plus marqués. Le milieu de la base paraît légèrement échancré; la base se prolonge un peu en arrière en dessous de l'impression interne, puis elle se relève jusqu'aux angles postérieurs; ni sur la base, ni sur les côtés, ni vers le bord antérieur, on ne remarque de ponctuation; les deux impressions seules portent quelquefois un petit nombre de points inégaux : elles sont très-nettes; l'intérieure, qui est la plus profonde, est oblongue; l'autre, plus rapprochée des angles postérieurs que dans l'*Eximia*, est ronde. Les élytres ne sont pas plus courtes, mais elles sont plus arrondies sur les côtés et moins profondément sinuées avant l'extrémité; l'angle huméral est moins aigu; les stries sont un peu moins profondes, leur ponctuation est très-faible et les intervalles sont moins relevés; la strie préscutellaire ne touche point en arrière la strie suturale. La série de gros points sur la 8ᵉ strie n'est pas ordinairement interrompue au milieu.

La collection de Mʳ. de Chaudoir renferme 3 ind. provenant de la collection de Mʳ. Dejean et trouvés par celui-ci en *Espagne*. Un 4ᵉ ex. vient de Grenade; il ne diffère des autres que par son corselet plus court et ses stries un peu plus fines sur les élytres.

J'en ai vu d'autres exemplaires rapportés d'Espagne par Mʳˢ. Chevrolat, Bellier et de Vuillefroy. J'en possède un recueilli jadis en Andalousie par Mʳ. Ghiliani.

83. *L. Corpulenta.* N. Sp.

Nigro-picea, subaenescens. Prothorax transversus, antice subangustatus, lateribus rotundatis, angulis posticis subrotundatis;

basi utrinque profunde sinuata, foveis basalibus punctatis, externa vix distincta. Elytra convexa, breviter atque late ovata, apice leviter sinuata, humeris elevatis, striata, striis tenuiter punctulatis, apice profundioribus.

Long. 7. — Él. 4 $^3/_4$ — Lat. 4 $^1/_2$ M.

Intermédiaire entre les *A. Brevis* et *Testudinea*.

Elle est de la longueur de la *Brevis* et de la même couleur, mais ses élytres sont plus larges, plus arrondies; leur surface dorsale est plus convexe; les intervalles sont moins relevés; le corselet est à peu près semblable, mais il est un peu plus rétréci antérieurement, ses angles postérieurs sont un peu plus marqués; les deux fossettes, surtout l'externe, sont moins profondes; toute la base, sauf le milieu, est parsemée de points très-inégaux dont les plus gros sont ceux de l'extérieur.

La *Testitudinea* est noire, plus grande; ses élytres sont encore plus larges et plus arrondies sur les côtés et plus convexes en dessus : le rebord marginal est plus large; la strie préscutellaire est isolée; le corselet est plus arrondi sur les côtés; ses angles antérieurs sont plus saillants; sa base n'est pas ponctuée; l'impression interne est moins large et plus linéaire; l'impression externe est très-distinctement arrondie; les yeux sont encore moins saillants; enfin, les épisternes métathoraciques sont beaucoup plus courts.

Un individu ♀ communiqué par M^r. de Vuillefroy comme venant de Grenade.

84. *L. Testudinea* N. Sp.

Atra, vix subaenescens. Oculi haud prominuli. Prothorax transversus, antice leviter angustatus, lateribus rotundatis, angulis anticis prominulis, posticis subrotundatis; basi utrinque profunde sinuata, foveolis basalibus laevibus, interna profundiore lineari, externa rotundata. Elytra convexa, brevissime atque latissime ovata, apice leviter sinuata, humeris elevatis, tenuiter striata, striis apice profundioribus, interstitiis planis. Episterna metathoracica subquadrata.

♂ Long. 8 $^1/_2$. — Él. 5 — Lat. 4 M.

♀ Long. 9. — Él. 5 $^1/_2$. — Lat. 4 $^1/_2$ M.

D'un noir de poix avec les bords externes du corselet d'un brun rougeâtre de même que les pattes; les palpes et les antennes sont testacés.

Les yeux ne sont nullement saillants et leur orbite forme, en dessous, une saillie bien distincte dirigée en avant. Le corselet est fortement transversal, très-légèrement échancré en avant, tronqué à la base qui n'est déprimée qu'en dessous de la fossette interne; les côtés sont très-régulièrement arrondis; ils se rétrécissent cependant un peu vers les angles antérieurs qui sont obtus et légèrement saillants.— Les angles postérieurs sont presqu'arrondis, mais cependant bien distincts. Le sillon longitudinal est peu profond, surtout à sa base et son extrémité n'atteint pas le bord antérieur. L'impression transversale antérieure est complètement oblitérée. La base est presque complètement lisse, c'est à peine si l'on parvient à y distinguer deux ou trois petits points. La fossette interne est linéaire, droite : elle ne descend pas jusqu'au bord basal. La fossette externe est petite et arrondie. Les élytres ont leur base un peu plus large que celle du corselet; elles forment un ovale extrêmement court, un peu plus large aux épaules qu'en arrière : leur surface est très-convexe, surtout la moitié postérieure; les épaules sont très-relevées en angle aigu; les côtés sont régulièrement arrondis, sinués avant l'extrémité. Les stries sont fines, peu profondes; les intervalles ne sont que très-légèrement convexes; la strie préscutellaire, qui prend naissance entre la 1re et la 2e strie, est oblique et courte. Les épisternes métathoraciques sont courts, presque carrés. Le praesternum du ♂ porte au milieu quelques points peu distincts.

Mr. de Vuillefroy m'a communiqué deux Amara venant d'Espagne (sans désignation plus précise) et que je considère comme étant les deux sexes de la présente espèce. La ♀ a les yeux encore moins saillants, les élytres plus larges, plus dilatées au milieu, et les intervalles des stries encore moins convexes.

De toutes les espèces qui peuvent servir de terme de comparaison, l'*A. Eximia* est la seule qui soit répandue dans toutes les collections. L'*A. Testudinea* est un peu plus grande et surtout beaucoup plus large; sa couleur est plus noire et nullement bronzée. La dent du menton est plus courte; les yeux sont moins saillants. Le corselet est plus rétréci antérieurement,

moins échancré en avant; ses angles antérieurs sont moins arrondis; le rebord latéral est plus large; la base n'est nullement ponctuée et la fossette externe est plus petite et plus arrondie; l'impression transversale antérieure, qui est distincte et souvent ponctuée chez l'*Eximia*, est complètement effacée dans la *Testudinea*. Les élytres sont beaucoup plus dilatées sur les côtés; les épaules sont plus arrondies; les stries sont moins profondes, nullement ponctuées; les intervalles sont moins convexes, surtout chez la ♀; la strie préscutellaire est plus courte, plus oblique, plus éloignée, à sa naissance, de la base de la 2e strie. Les épisternes métathoraciques sont plus courts et plus larges : le praesternum du ♂ n'offre pas un espace ovale ponctué; il porte seulement au milieu quelques points épars.

L'*A. Gravidula* Rosenh. pourrait être la présente espèce ou l'une des espèces suivantes; mais la description me permet d'autant moins de trancher la question que, probablement, le groupe auquel appartiennent ces espèces est largement représenté en Espagne.

85. *L. Arcuata*. N. Sp.

Aenescenti-nigra. Prothorax transversus, basi angulatim arcuatus, lateribus rotundatis, angulis posticis subrotundatis, basi laevi, foveola basali interna lineari parum profunda, externa rotundata vix perspicua. Elytra convexa, breviter atque late ovata, apice leviter sinuata, humeris elevatis, tenuiter laevi-striata, interstitiis planis.

Long. 6. — Él. 3 1/2 — Lat. 2 3/4 M.

D'un noir bronzé brillant. Elle se rapproche beaucoup de l'*A. Corpulenta*, mais elle est notablement plus petite; les deux impressions entre les antennes sont moins larges; les yeux sont plus saillants. Le corselet est transversal; le bord antérieur est légèrement échancré. La base, complètement lisse, forme presqu'un arc de cercle, légèrement échancré au milieu, anguleux en dessous des fossettes internes : cette forme est celle des *A. Brevis, Corpulenta, Testudinea* etc. mais dans aucune de ces espèces elle n'est aussi marquée qu'ici. La fossette interne

est linéaire, courte, peu profonde; la fossette externe, très-petite, ronde, est à peine distincte. Les angles antérieurs sont plus déprimés et plus saillants que dans la *Corpulenta;* les angles postérieurs sont plus arrondis ; les élytres ont à peu près la même forme; cependant elles sont proportionnellement plus courtes, un peu plus arrondies en dessous des épaules; les stries sont plus fines, nullement ponctuées et leurs intervalles sont complètement plans.

M^r^. de Vuillefroy m'en a communiqué deux individus venant de Carthagène.

86. *L. Rotundicollis* Schauf. Rev. Zool. 1862. 492.

Long. 6 $^1/_4$. Lat. 3 $^1/_8$ M.

Nigro-picea, antennis tibiarumque basi rufo-testaceis. Caput minus, oculi subdepressi. Prothorax breviter cordatus, antice emarginatus angulis anticis porrectis, lateribus rotundatis, ante angulos posticos rotundatos abrupte constrictus ; basi profunde atque late foveolata. Elytra breviter ovata, striato-punctata, striola praescutellari brevissima; humeris elevatis angulatis.

D'un noir de poix brillant; l'extrémité des palpes, les antennes, la base des tibias et les tarses d'un testacé rougeâtre.

La tête est petite; elle porte, entre les antennes, un sillon transversal profond qui se recourbe en arrière de chaque côté pour former les deux fossettes interoculaires que l'on voit ordinairement dans les Amares; on remarque sur le vertex un gros point enfoncé. Les yeux sont fort peu saillants, et le développement du bord postérieur les fait paraître déprimés. Le corselet a à peu près la forme d'un cœur très-court; ses côtés sont très-arrondis, mais, un peu avant la base, ils sont brusquement et fortement rétrécis; le bord antérieur est profondément échancré, un peu élevé dans son milieu; les angles antérieurs sont très-saillants, presque droits et fortement déprimés. Les angles postérieurs sont arrondis. Le milieu de la base, de chaque côté, est occupé par une impression très-profonde au fond de laquelle on aperçoit deux fossettes linéaires; ces impressions, de même que la base, ne présentent aucune ponctuation : le milieu de la base n'est nullement déprimé; le sillon longitudinal est profond entre la base et l'extrémité, et on y

remarque plusieurs dépressions ; le rebord marginal est assez large.

Les élytres sont plus larges que le corselet, en ovale assez court; la base est tronquée; l'extrémité est rétrécie et assez fortement sinuée de chaque côté; le rebord basal est assez relevé, surtout près de l'écusson; il remonte légèrement jusqu'aux angles huméraux où il se relève de manière à former une saillie assez prononcée; les stries sont profondes et ponctuées; on n'aperçoit, à la base du 2e intervalle, qu'un faible rudiment de la strie préscutellaire.

Le bord postérieur des premiers segments abdominaux et toute l'extrémité du dernier sont fauves.

Je ne possède qu'un ind. ♂ de ce remarquable insecte qui m'a été envoyé par Mr. Schaufuss comme venant des montagnes de l'Espagne centrale. Mr. de Vuillefroy en a également rapporté un de l'Escorial.

87. *L. Ooptera.*

Long. 5. Lat. 3. mill.

Par la forme de ses élytres, elle se rapproche de la *Rotundata*, mais son corselet est tout-à-fait différent.

La tête et le corselet sont bruns, les élytres d'un noir de poix brillant : la bouche, les antennes, les pattes et le bord externe du corselet sont testacés.

La tête est assez large, lisse, munie seulement des deux impressions ordinaires entre les yeux ; ceux-ci sont médiocrement saillants. Le corselet est un peu moins long que large, très-convexe, plus fortement arrondi dans sa moitié antérieure que depuis le milieu où il commence à se rétrécir jusqu'à la base; les angles postérieurs sont petits, presque droits, mais leur pointe est arrondie; le bord antérieur est un peu élevé aux deux angles. La base, dont le milieu est un peu prolongé en arrière, est déprimée entre les fossettes internes qui sont séparées des fossettes externes par une carène large et triangulaire qui n'est que le prolongement de la surface du corselet. Les fossettes internes sont très-marquées, linéaires et remontent obliquement jusqu'au tiers du corselet; les fossettes externes sont arrondies et peu profondes. Toute la base n'est que très-faiblement ponctuée.

Les élytres sont très-convexes, en ovale très-court, fortement arrondies sur les côtés, leurs stries sont presque lisses : la strie préscutellaire est presque nulle et se réduit à un petit point placé à la base entre les 1re et 2e stries; le rebord basal est arqué depuis l'écusson jusqu'à l'épaule qui est anguleuse mais non saillante.

J'ai vu un ind. de cet insecte de la coll. de Mr. de Bonvouloir où il est noté comme trouvé à l'Escurial (Espagne centr.) Mrs. Chevrolat et Bellier de la Chavignerie l'ont également trouvé dans la même localité.

88. *L. Rotundata* Dej. Spec. III. 492. 34.

Long. 4 1/2. Lat. 2 1/2 M.

Ovata, convexa, supra rufo-brunnea, elytris nigro-piceis, nitidis; antennis pedibusque testaceis. Prothorax brevis transversus lateribus subrotundatis, angulis anticis deflexis, posticis obtusis; basi impunctato, utrinque oblonge foveolato punctoque versus angulos impresso. Elytra breviter ovata, humeris angulatis, subtiliter striata, striola praescutellari brevi.

La tête, le corselet et le dessous du corps sont d'un brun assez clair, les pattes et surtout les palpes et les antennes sont testacés. Les yeux sont assez saillants. Les palpes sont plus épais et moins allongés que dans la *L. Cottyi*. Les antennes, grossissant un peu vers l'extrémité et composées d'articles serrés, n'atteignent pas tout-à-fait la base du corselet.

Le corselet est transversal, tronqué antérieurement; ses angles antérieurs sont très-déprimés; les côtés sont fortement arrondis jusqu'au milieu; les angles postérieurs sont très-obtus. Les deux impressions de la base sont complètement glabres; l'intérieure est assez large et ne touche pas le bord basal; l'extérieure est très-petite et arrondie. La ligne longitudinale est bien marquée depuis la base jusqu'en dessous du bord antérieur.

Les élytres sont fort courtes, larges, un peu rétrécies vers l'extrémité qui n'est que très-faiblement sinuée; les épaules sont anguleuses. Les stries, très-fines, s'élargissent vers l'extrémité; bien que Dejean les signale comme entièrement lisses, il suffit de les examiner obliquement pour voir qu'elles sont légèrement

ponctuées; la strie préscutellaire est courte. La série marginale de gros points n'est interrompue qu'au milieu. Les jambes sont très-épineuses.

Espagne. La collection Dejean ne renferme qu'un seul ind. ♂.

89. *L. Affinis.* Dej. Spec. III. 488. 30.

Long. 6. Lat. 3 M.

Fusco-aenea; palpis, antennis pedibusque testaceis. Oculi subprominuli. Prothorax transversus, angulis anticis rotundatis; lateribus antice rotundatis, dein arcuatis; angulis posticis obtusis; basi bisinuata; foveola basali interna oblonga profundiore, externa rotundata, basi tota punctulata. Elytra oblongo-ovata, convexa, postice leviter angustata, humeris nec elevatis, obtusis, striatopunctata; striola praescutellari brevi; foveolarum serie in stria 8 *subinterrupta.*

Le dernier article des palpes labiaux est étroit, un peu allongé, arrondi à son extrémité; les antennes sont minces et dépassent la base des élytres. Les yeux sont peu convexes, enchâssés en arrière. Le corselet est transversal, un peu plus étroit à la base qu'en avant; les côtés sont plus fortement arrondis en avant qu'en arrière où ils tombent sur la base avec laquelle ils forment un angle obtus.

Le bord basal est un peu échancré au milieu, puis un peu arqué en remontant vers les angles. Le milieu de la base est assez fortement déprimé et modérément ponctué. Les deux impressions basales sont assez profondes, surtout l'interne qui est ovale; l'externe, située assez près des angles postérieurs est arrondie; elles sont l'une et l'autre assez fortement ponctuées.

Les élytres sont en ovale un peu allongé, rétrécies et distinctement sinuées vers l'extrémité chez la ♀. Le rebord basal est assez peu marquée; il ne se relève que faiblement vers les épaules où il forme un angle très-ouvert. Les stries sont profondes, surtout en arrière, assez légèrement ponctuées; la 7e est fort peu distincte en dessous de l'épaule; la strie préscutellaire est très-courte et ne se réunit pas à sa base à la 2e

strie. La série de gros points sur la 8e strie est à peine interrompue au milieu.

Cette espèce a quelque rapport avec la *L. Brevis*, mais sa taille est moindre; le corselet est moins large à la base, moins arrondi sur les côtés; la fossette interne de la base est plus arrondie; toute la base est ponctuée; les élytres sont proportionnellement moins larges, plus allongées; les épaules sont moins saillantes : les stries sont plus distinctement ponctuées et la strie préscutellaire, autrement placée, est beaucoup plus courte.

Mr. de Chaudoir possède 3 individus dont deux (♂ et ♀) de la collection Dejean.

Espagne.

Heer (Faun. Helv. I. 91. II.) signale l'*A. Affinis* D. comme se trouvant à Genève. Mais tout en disant que le corselet est plus court, il ne dit pas qu'il est plus large et d'une forme toute différente; il lui attribue des impressions moins profondes que chez l'*A. Bifrons*, tandis que c'est le contraire qui est vrai.

Je pense que l'insecte trouvé à Genève appartient plutôt à une variété de l'*A. Bifrons*.

90. *L. Fervida* Coq. Ann. S. ent. Fr. 1858. 776.

Long. 7. Lat. 3 mill.

Aeneo-brunnea, elytris aeneo-piceis, palpis, antennis pedibusque testaceis. Prothorax subquadratus, postice leviter angustatus, angulis anticis deflexis, rotundatis : lateribus ante medium rotundatis, dein fere rectis, angulis posticis obtusis, basi depressa, bifoveolata, punctulata. Elytra oblonga, humeris subdentatis, punctulato-striatis, striola praescutellari utrinque abbreviata, basi foveolata; foveolarum serie in stria 8a *subinterrupta.*

Bien que voisine de la *L. Sabulosa*, cette espèce en est cependant bien distincte. Les yeux sont moins saillants. Le corselet est plus étroit et surtout plus long, moins échancré au bord antérieur, beaucoup moins arrondi sur les côtés qui, après le milieu, ne sont que très-légèrement arqués; il est moins rétréci aux angles postérieurs, qui sont plus arrondis : le bord basal est plus fortement sinué. La base porte des points beaucoup plus petits : les deux impressions sont plus distinctes; l'in-

térieure est linéaire, un peu oblique, l'extérieure est presqu'arrondie; le sillon longitudinal est plus distinct en avant; le sillon transversal antérieur l'est moins. Les élytres sont un peu plus ovales; leurs stries, moins profondes, ne sont que faiblement ponctuées. La strie préscutellaire est ordinairement un peu plus courte. La ponctuation en dessous du corps est moins marquée.

Mr. Poupillier m'a remis quelques exemplaires de cet insecte, capturé par lui dans les environs d'Alger. La collection de Mr. de Chaudoir renferme également des individus provenant de la même localité.

N. B. Quelquefois le corselet n'est pas plus long que celui de la *L. Sabulosa*, mais les autres caractères subsistent.

91. *L. Simplex.* Dej. Spec. III. 493. 31.

Long. 7 3/4 Lat. — 3 3/4 M.

Flavo-castanea. Prothorax transversus, antice leviter emarginatus, angulis anticis subporrectis rotundatis, lateribus angulisque posticis rotundatis; basi sinuata, foveolis duabus utrinque leviter punctatis, interna oblonga, externa vero rotundata. Elytra subconvexa, ovata, humeris subrectis, subtiliter striata leviterque punctulata; striola praescutellari longa : foveolarum serie in stria 8a *in medio subinterrupta.*

Entièrement d'un brun marron très-clair, qui est un peu plus foncé sur la tête et au milieu du corselet. Les palpes labiaux ont leur dernier article plus étroit et plus long que dans les maxillaires, et légèrement tronqué à l'extrémité. Les antennes, composées d'articles assez allongés, dépassent les épaules. Les yeux sont peu saillants. Le corselet est court, transversal, un peu plus large à la base qu'à l'extrémité, échancré antérieurement; les angles, qui s'avancent distinctement, sont arrondis; les côtés sont régulièrement arqués jusqu'aux angles postérieurs qui, bien que marqués, sont arrondis. La base, légèrement échancrée au milieu, est bisinuée; elle est déprimée en dessous des fossettes internes et se redresse un peu jusqu'aux angles postérieurs; de chaque côté, on remarque deux impressions dont l'intérieure, assez large, porte au centre une strie profonde qui n'atteint pas la base et remonte jusqu'au premier tiers du corselet;

l'impression extérieure présente la forme d'une fossette arrondie : chacune de ces impressions est entourée de points assez peu marqués. Le sillon longitudinal est peu profond, surtout antérieurement; en arrière, il n'atteint pas la base et, en avant, il ne dépasse pas l'impression transversale antérieure qui est assez marquée.

Les élytres sont en ovale un peu allongé, assez convexes, presqu'aussi larges en arrière qu'en avant, assez fortement sinuées avant l'extrémité; le rebord basal, déprimé avant le milieu, remonte très-distinctement jusqu'aux angles huméraux qui sont relevés et obtus. Les stries sont fines, très-faiblement ponctuées, surtout vers la base; la strie préscutellaire est assez longue et part de la base de la 2e strie pour se joindre, à son extrémité, à la strie suturale. La série de points sur la 8e strie est faiblement interrompue au milieu. Les épisternes métathoraciques sont allongés, striés à leur côté interne, non ponctués.

Les tibias intermédiaires sont arqués intérieurement.

Cette espèce est extrêmement voisine de la *L. Dalmatina*. Le corselet est un peu plus court et plus large; ses angles antérieurs sont un peu plus avancés; les côtés sont moins arrondis, surtout inférieurement; les angles postérieurs ne forment aucune saillie; la base n'est nullement ponctuée au milieu et les deux impressions le sont beaucoup moins. Les élytres, qui sont un peu plus allongées, sont beaucoup plus finement striées, plus faiblement ponctuées et les intervalles sont tout-à-fait plans.

La collection de Mr. de Chaudoir ne renferme qu'un seul individu ♂, provenant de la collection Dejean. Mrs. Chevrolat et Bellier en ont trouvé chacun une ♀ à Valladolid. Mr. Vuillefroy m'en a communiqué deux autres, venant l'une de Carthagène, l'autre de Murcie. La première est un peu plus courte que le type et la base du corselet est plus arrondie et plus relevée vers les angles; l'autre a, au contraire, la base du corselet plus nettement tronquée, son bord latéral est moins arrondi et moins rétréci vers les angles postérieurs. J'ignore si ces variations ont quelque fixité, et si, par conséquent, il est possible de leur accorder quelqu'importance.

92. *L. Indica.* Chaud. (coll.)

Long 6 $^1/_2$ — 2 $^3/_4$ M.

Fulva, pedibus testaceis. Prothoraæ transversus, antice subemarginatus, lateribus leviter arcuatis, basi angustior, angulis posticis rectis minutis; basi ipsa foveolis 2 notata, punctulatis, interna lineari externa minus perspicua. Elytra oblonga, tenuiter striata, punctis striarum vix distinctis; striola praescutellari longa.

D'un fauve clair sur les élytres, un peu rougeâtre sur la tête et le corselet; les pattes sont d'un testacé très-pâle; il semble, au reste, que l'unique individu que j'ai sous les yeux et qui est en fort mauvais état, soit assez récemment transformé.

La dent du menton est presqu'aussi élevée que les lobes latéraux et échancrée à son extrémité. La tête est convexe; les yeux, médiocrement saillants, sont enchâssés en arrière; les antennes sont longues et s'étendent au delà de la base des élytres. Le corselet est transversal, un peu plus étroit vers la base qu'en avant, légèrement arrondi sur les côtés. Le bord basal est bisinué; les angles postérieurs sont très-petits, droits, un peu dirigés en arrière; la base est déprimée sur les côtés; les deux impressions qu'elle porte sont peu profondes, l'interne est cependant plus marquée que l'autre et linéaire; ent e elles on remarque quelques points peu nombreux. Le sillon longitudinal est très-fin, indistinct antérieurement. Les élytres sont oblongues, un peu allongées, plus étroites à l'extrémité; leurs st ies sont peu larges, peu profondes, très-faiblement ponctuées; les intervalles sont presque plans; le rebord basal se relève jusqu'aux épaules. La strie préscutellaire est longue; située entre l'écusson et la strie suturale qu'elle ne touche pas en arrière. La ligne de points sur la 8^e strie est interrompue au milieu. Les épisternes métathoraciques ne sont pas ponctués. De chaque côté de l'anus, on remarque deux points pilifères.

1 ind. ♀ dans la coll. de Chaudoir, rapporté de l'Inde boréale par le D^r. Bacon.

92. *L. Syriaca.* Chaud. (coll.)

Long. 6. Lat. 2 $^1/_2$ mill.

Flavo-brunnea; palpis, antennis pedibusque testaceis; oculi parum prominuli. Prothorax transversus, angulis anticis deflexis rotundatis, lateribus ante medium arcuatis, angulis posticis subrotundatis, basi tota punctulata obscureque bifoveolata. Elytra oblonga, humeris subdentatis, punctato-striata; striola praescutellari longa.

Cet insecte, dont je n'ai vu qu'un seul exemplaire, probablement transformé récemment, a assez de rapports avec la *L. Sabulosa*. Les antennes sont moins allongées; le dernier article des palpes labiaux est plus acuminé; les yeux sont moins saillants. Le corselet est notablement plus court, proportionnellement plus large, surtout en arrière; les angles antérieurs étant fortement défléchis, la partie antérieure paraît plus étroite que la base; les côtés sont moins arrondis; les angles postérieurs sont plus obtus, presqu'arrondis; les points qui couvrent la base sont plus inégaux; les deux fossettes sont tout aussi peu distinctes. Les élytres sont un peu plus ovales, un peu moins profondément ponctuées; la strie préscutellaire est plus longue; elle part de la base de la 2^e strie et se réunit en arrière à la strie suturale; les gros points sur la 8^e strie sont disposés de même. En dessous, la ponctuation est moins prononcée.

M^r de Chaudoir possède un seul ex. ♂ rapporté de Syrie par Kindermann.

94. *L. Diversa.*

Long. 5 $^1/_4$ — Lat. 2 $^3/_4$ M.

Fusco-aenea, palpis, antennis pedibusque testaceis; oculi prominuli. Prothorax transversus, angulis anticis rotundatis deflexis; lateribus rotundatis, angulis posticis obtusis; basi in medio foveolisque basalibus modice punctulatis, foveola externa rotundata. Elytra oblongo-ovata, profunde punctato-striata, striola praescutellari nec abbreviata; foveolarum serie in stria 8^a vix interrupta.

Voisine de la *L. Affinis*. Les antennes sont plus épaisses et plus longues, les yeux plus saillants; le dernier article des palpes est plus distinctement tronqué à l'extrémité. Le corselet a les

angles antérieurs beaucoup plus défléchis, ce qui le fait paraître plus étroit en avant; les côtés sont plus arrondis, surtout en arrière; le bord basal est plus nettement tronqué; la fossette basale interne est beaucoup moins profonde et entourée de quelques points ; l'externe est ronde comme dans l'*Affinis*. Les élytres sont un peu plus courtes, plus larges et moins profondément sinuées à l'extrémité; les épaules sont plus arrondies; les stries sont un peu plus profondes et plus fortement ponctuées; la strie préscutellaire est assez longue; elle part de la base de la 2e strie et se réunit à son extrémité à la strie suturale.

Dalmatie. Un seul ind. ♀ qui figurait dans la coll. Dejean parmi des *A. Bifrons*.

95. *L. Arenaria*. N. Sp.

Castaneo-brunnea, palpis, antennis pedibusque testaceis. Prothorax subquadratus, postice leviter angustatus, margine anteriore subemarginato, angulis anticis deflexis rotundatis, lateribus ante medium rotundatis, angulis obtusis subrotundatis; basi depressa, obscure bifoveolata, foveolis fortiter punctatis.— Elytra oblonga, humeris elevatis, profunde punctato-striata : striola praescutellari striae 2a basi connexa. Episterna metathoracica glabra.

Long. 5 1/3 — Él. 3 1/3 — Lat. 2 1/3 M.

Elle a un peu l'aspect de la *L. Sabulosa*, mais elle est plus petite, plus étroite; les yeux sont un peu moins saillants; le corselet est plus court, plus échancré en avant; la base est plus nettement tronquée; les côtés sont un peu moins arrondis en avant et le sont davantage en arrière ; les angles antérieurs sont plus aigus; le rebord marginal est un peu plus large surtout au-dessus des angles postérieurs lesquels sont plus obtus; les deux fossettes de la base sont plus distinctement arrondies, leurs points sont plus écartés et moins nombreux : il n'en existe pas au milieu de la base. Les élytres sont un peu plus courtes, les côtés sont plus arrondis; les angles huméraux plus relevés; le point préscutellaire est nul; la ponctuation des stries est moins distincte. Le praesternum est lisse, comme dans l'*A. Sabulosa*, mais les épisternes métathoraciques et les côtés de l'abdomen qui, dans cette espèce, sont fortement ponctués, ne le sont nullement dans l'*Arenaria*.

M^r^ Bellier m'en a communiqué 2 individus rapportés par lui de l'Espagne centrale.

96. *L. Sabulosa.* Dej. Spec. III. 486. 28.

L. Polita. Chaud. Car. du Caucas. 161. et Berlin. Ent. Z. V. 198.

A. Barnevillii. Fairm. Ann. Soc. ent. 1856. 521.

Long. 7. — Lat. 3 mill.

Aeneo-picea, palpis, antennis pedibusque fusco-brunneis. Prothorax subquadratus, postice leviter angustatus, margine anteriore subemarginato, angulis anticis deflexis rotundatis, lateribus ante medium rotundatis, dein subarcuatis; angulis posticis obtusis apice extus prominulo; basi depressa, obscure bifoveolata, atque fortiter punctata. Elytra oblonga, humeris subdentatis, profunde punctato-striata; striola praescutellari utrinque abbreviata, basi foveolata; foveolarum serie in stria 8^a^ vix interrupta. Episterna metathoracica grosse punctata.

Les yeux sont assez saillants, très-peu enchâssés en arrière, le corselet, presque carré, un peu rétréci après le milieu, est assez convexe; le bord antérieur est assez échancré; les angles antérieurs sont arrondis, défléchis; le bord latéral est assez fortement arrondi avant le milieu; de là, il est fort peu arqué et tombe sur la base dont le bord marginal est légèrement échancré au milieu. Les angles postérieurs sont obtus, mais leur pointe fait une légère saillie extérieure : toute la base est déprimée et fortement ponctuée : l'impression basale interne est fort peu distincte; l'externe l'est davantage; le rebord marginal est étroit. Les élytres sont oblongues, légèrement rétrécies à l'extrémité, peu arrondies sur les côtés; le rebord basal ne se relève que près des épaules et y forme une petite saillie externe; les stries sont profondes et fortement ponctuées, sauf à la base des 4^e^, 5^e^, 6^e^ et 7^e^ et à l'extrémité; la strie préscutellaire ne touche ni la 2^e^ strie ni la strie suturale; elle commence au dessous du rebord par un point assez gros. La série de points dans la 8^e^ strie est à peine interrompue vers le milieu. La poitrine et les côtés de l'abdomen sont ponctués.

Les 3 individus typiques de la collection Dejean viennent de

l'ouest de la France; ils sont d'un brun plus ou moins foncé.

L'exemplaire d'Arménie décrit par Mr de Chaudoir sous le nom de *L. Polita* a les stries un peu moins ponctuées que dans le type.

Mr de Barneville a bien voulu me donner un ex. ♂ de la *L. Barnevillii* trouvée par lui dans le bois de Meudon. J'en ai vu un second individu dans la coll. de Mr de Vuillefroy. Ils sont un peu plus grands que ceux de Dejean et d'une couleur plus foncée.

97. *L. Crenata.* Dej. Spec. III. 507. 49.
Schaum D. J. I. 515. 9.

98. *L. Avida.* Say. (Pelor.)
Le Conte Proc. Philad. 1856. 346. I.
A. Confinis. Dej. Spec. III. 510. 52.

États-Unis.

99. *L. Glabrata.* Dej. III. 489. 51.

Long. 7 $^3/_4$ — Lat. 3 $^2/_3$ M.

Nigro-aenea, palpis basi, antennis pedibusque rufo-piceis. Prothorax subquadratus, basi subangustatus, lateribus rotundatis, angulis posticis subrectis prominulis. Elytra ovata, subtiliter striato-punctata, striola praescutellari abbreviata foveolarum serie in stria 8ª in medio tantum interrupta.

D'un noir bronzé brillant; les premiers articles des palpes, les antennes et les pattes sont d'un brun parfois assez clair. Le dernier article des palpes labiaux se termine presqu'en pointe; les antennes dépassent à peine la base du corselet. Les yeux peu saillants, sont enchâssés en arrière. Le corselet est faiblement rétréci vers la base; il est un peu plus court que large, échancré en avant, avec les angles antérieurs un peu avancés, mais arrondis à leur extrémité. Les côtés sont légèrement arrondis jusqu'au milieu; de là ils tombent presque directement sur la base où ils forment les angles postérieurs, plus ouverts que l'angle droit, mais ayant une légère saillie extérieure. Le bord basal n'est nullement échancré au milieu, mais il s'abaisse en dessous de la fossette interne; cette dernière est

oblongue, très-profonde et très-nette ; la fossette externe est beaucoup plus courte et arrondie ; l'une et l'autre sont entourées de quelques points assez petits. Les élytres sont ovales, plus larges à la base qu'à l'extrémité ; leurs épaules forment une légère saillie ; leurs stries sont peu profondes et les points sont bien distincts. La strie préscutellaire est à peine distincte ; non seulement elle est très-courte, mais elle est interrompue.

La série de gros points dans la 8e strie n'est interrompue qu'au milieu.

Espagne, Algérie, Calvados, Lyon.

100. *L. Montana.* Dej. Spec. III. 487. 29.

A. Corsica. Reiche Ann. Soc. ent.

Long. 7 $^1/_2$. — Lat. 3 $^1/_3$ M.

Nigro-picea, palpis, antennis pedibusque testaceis. Prothorax subquadratus, postice angustatus, angulis posticis obtusis; basi depressa, punctulata, bifoveolata. Elytra oblongo-ovata, tenuiter striato-punctata.

D'un noir de poix, mais souvent brune dans les individus récemment transformés. Les palpes, les antennes, les pattes (à l'exception de l'extrémité des cuisses et de la base des tibias) sont d'un testacé rougeâtre. Le dernier article des antennes est distinctement tronqué. Les antennes, assez minces, dépassent notablement les épaules. Le corselet est un peu plus large que long, tronqué en avant, médiocrement arrondi sur les côtés, ayant sa plus grande largeur un peu au-dessous du milieu, rétréci en arrière, un peu échancré au milieu de la base et un peu défléchi à partir de ce point jusqu'aux angles postérieurs qui sont obtus, mais font, cependant, une légère saillie extérieurement. Les deux impressions de la base sont ovales, linéaires au fond, surtout l'interne qui est presque du double plus longue que l'autre ; cette dernière est située assez près des angles. Toute la base est ponctuée, mais ces points ne sont gros et serrés qu'autour des deux impressions. Les élytres sont en ovale un peu allongé, peu rétrécies à l'extrémité où elles ne sont que faiblement sinuées ; les côtés sont un peu arrondis ; la base est presque tronquée ; le rebord basal se relève un peu vers l'épaule où il forme une petite saillie. Les stries sont

peu profondes et très-finement ponctuées; les intervalles sont plans; la strie préscutellaire, partant de la base de la 2e strie, se réunit en arrière à la strie suturale. La série de gros points sur la 8e strie est à peine interrompue au milieu.

Cette espèce qui se trouve dans toute l'Europe méridionale, est très-variable dans la forme de son corselet qui est plus ou moins long, plus ou moins rétréci vers la base; celle-ci est plus ou moins ponctuée et les angles postérieurs, ordinairement ouverts, mais bien marqués, sont quelquefois presqu'arrondis. La profondeur des stries et leur ponctuation sont également sujettes à des variations.

C'est sur une de ces variétés, plus petite, plus étroite et à corselet plus élargi avant le milieu, qu'a été établie l'*A. Corsica* Reiche.

101. *L. Cordicollis.* Zimm. Mon. Amar. gen. VI 1er gr. (Leiocnemis.)

Falderm. Faun. Trans. p. 75 n° 67.

Long. 8 $^1/_2$. — Lat. 4 M.

Virescenti picea, palpis, antennis pedibusque rufis. Prothorax subcordatus, margine antica emarginata, angulis anticis subrectis deflexis, lateribus rotundatis, ante basim emarginatis dein fere rectis; margine basali truncato, angulis posticis subacutis, paulo deflexis; basi depressa, oblique bifoveolata, parce punctulata: margine laterali anguste marginata. Elytra in dorso depressa, oblonga, in mare subparallela, humeris obtusis, sat tenuiter striato-punctata, foveolarum serie in stria 8a *in medio interrupta; episternis metathoracis punctulatis.*

Caucase. 7 ind. provenant tant de la collection Dejean que de celle de Mr de Chaudoir.

102. *L. Subdepressa.* Nov. Sp.

Long. 8 $^1/_4$. — Lat. 4 M.

Nigro-picea, elytris nitidis, palpis, antennis pedibusque brunneis. Prothorax subcordatus, angulis anticis prominulis, posticis rectis subprominulis; basi foveolis duabus, interna profunda, externa vero minus distincta, punctulatis impressa. Elytra oblonga

lateribus subparallelis, humeris elevatis obtusis, in dorso planiuscula, sat tenuiter striato-punctata.

Assez voisine de la *L. Cordicollis* dont elle diffère par son corselet moins cordiforme, à côtés moins arrondis avant le milieu et moins rétrécis avant les angles postérieurs qui sont notablement moins saillants, mais cependant plus que chez la *L. Cordicollis;* les angles antérieurs sont plus avancés; l'impression externe de la base est beaucoup moins distincte et la carène moins forte; les points, également peu nombreux, sont plus gros; l'impression transversale antérieure est moins déprimée. Les élytres sont encore un peu plus allongées et plus parallèles; les stries sont comme celles de la *Cordicollis*, mais leur ponctuation est moins distincte; la strie préscutellaire est plus allongée que celle de la *L. Planipennis*, mais plus courte que celle de la *Cordicollis:* les épisternes métathoraciques sont semblables à celles de la *L. Planipennis*, mais plus fortement ponctuées.

Alpes du Caucase.

La coll. de M^r^ de Chaudoir possède un ♂ étiqueté par M^r^ Motschulsky du nom de *Leirus Depressus* que j'ai dû modifier attendu qu'il existe déjà deux *Amara Depressa*, l'une décrite par Zimmermann, l'autre par Le Conte.

103. *L. Planipennis.* Nov. Sp.

Long. 8. — Lat. 3 $^1/_2$ M.

Nigro-picea, elytris nitidis, palpis, antennis pedibusque brunneis. Prothorax subcordatus, angulis posticis acutiusculis, basi depressa, foveolis duabus linearibus parce punctulatis utrinque impressa. Elytra oblonga, lateribus parum rotundata, humeris obtusis, striato-punctata, striola praescutellari apice abbreviata; foveolarum serie in stria 8^a^ *in medio tantum interrupta : episternis parce punctulatis.*

Un peu plus petit que la *L. Cordicollis;* d'une couleur plus foncée et sans reflets métalliques; les yeux sont moins proéminents, plus enchâssés en arrière et limités vers la tête par une carène plus élevée. Le corselet a les angles antérieurs moins défléchis, plus avancés; les côtés sont plus fortement arrondis avant le milieu au dessous duquel ils sont plus échancrés; les angles postérieurs

sont beaucoup plus saillants ; les deux impressions de la base sont plus nettes, à peine ponctuées et la carène située entre la 2e et le bord marginal est moins distincte ; l'impression transversale antérieure est plus déprimée. Les élytres sont un peu plus étroites, plus parallèles, plus planes au-dessus ; les épaules sont plus relevées, mais à peine plus saillantes ; les stries sont plus profondes et leurs points un peu plus gros ; les intervalles sont plus convexes ; la strie préscutellaire est moins longue, située entre l'écusson et la 1re strie. La série de gros points dans la 8e strie n'est interrompue que dans son milieu : les épisternes métathoraciques sont un peu plus courts et moins fortement ponctués : les tibias intermédiaires sont plus arqués et plus distinctement élargis en dessous du milieu.

Caucase. (1 ♂. coll. de Mr de Chaudoir.)

Amathitis Zimm.

Tout ce que Zimmermann dit du genre *Amathitis*, c'est que la dent du menton est simple et que le corselet est fortement rétréci enarrière. Cela suffisait, en effet au but de classement que se proposait l'entomologiste allemand, et sa description sommaire de *A. Aegyptia* pouvait ne pas exiger plus de détails, puisqu'alors un seul insecte rentrait dans le genre.

Aujourd'hui, je connais 6 espèces d'*Amathitis* et probablement ce nombre est destiné à s'accroitre encore. Je serai donc forcé de donner à mes descriptions des développements de quelqu'étendue.

Bien que je maintienne le genre tel que Zimmermann l'a établi, je dois faire remarquer que deux espèces de *Bradytus* (*Parvicollis* et *Abdominalis*) devraient y rentrer si l'on ne tenait pas compte de ce que, dans ces deux espèces, la dent du menton est plus ou moins bifide et que les tibias postérieurs des ♂ sont pubescents intérieurement.

De ce que la dent du menton est *simple*, il ne faut pas conclure qu'elle est aiguë comme dans les *Acrodon*. Cela doit simplement signifier qu'elle n'est pas bifide. Par fois aiguë dans l'*A. Aegyptia* (la seule qu'ait connue Zimmermann) elle devient très-courte, très-large dans d'autres espèces et elle finit même par n'être qu'un simple renflement.

Toutes les espèces ont un sillon à l'extrémité de la pointe sternale, mais pas de points pilifères.

104. *A. Rufescens* Dej. IV 387. (Harpalus.)

A. Aegyptia Zimm. (l. c.)

Egypte. ♂ et ♀.

105. *A. Subplanata.*
Long. 8 ½ 10 ½. — Lat. 3 ¾. 4 ¾ mill.

La languette est en triangle allongé, plus étroite que chez les *Leiocnemis* et les *Curtonotus;* simplement tronquée au sommet qui n'est pas un peu anguleux comme dans ces derniers genres; les paraglosses, membraneuses et transparentes, la dépassent. La dent du menton, très-large et occupant toute l'échancrure, est très-courte et obtuse; le pénultième article des palpes maxillaires est plus court que le dernier tandis qu'il est au moins d'égale longueur dans les *Curtonotus :* le dernier article des palpes labiaux, au lieu d'être élargi et fortement tronqué à l'extrémité, s'atténue à partir de la base et à son extrême pointe qui est obtuse. Les mandibules sont épaisses, aussi obtuses au bout que chez les *Curtonotus;* elles portent extérieurement près de l'extrémité quelques rides et quelques points. Les antennes sont médiocrement épaisses, peu allongées; elles dépassent à peine la base du corselet. La tête est assez large; les yeux sont saillants, non enchâssés en arrière et séparés du vertex par une carène peu élevée. Les deux impressions du devant de la tête sont assez longues, presque droites, lisses; elles sont bornées extérieurement par une élévation assez prononcée en carène obtuse. Le corselet, d'un tiers plus large que la tête, est transversal, rétréci en arrière, très-arrondi sur les côtés et aux angles antérieurs où il est exactement de la largeur du col; la plus grande largeur du bord latéral est avant le milieu; de là jusqu'au dernier quart, il est très-légèrement arqué; puis il se dirige perpendiculairement sur la base où il forme les angles postérieurs qui sont à peine un peu plus ouverts que droits. Le bord basal est un peu déprimé au-dessous de chacune des impressions; le milieu de la base est faiblement déprimé, mais les côtés le sont fortement; on y remarque deux impressions, linéaires au fond, et dont l'intérieure, parallèle à la suture du corselet, est la plus longue; l'impression extérieure, oblique et plus courte, part presque de l'angle postérieur; toute la base est couverte d'une ponctuation qui est

moins forte au milieu et qui remonte un peu vers la partie externe; le sillon longitudinal, très-peu profond au milieu, n'atteint pas le bord antérieur; l'impression antérieure est profonde et lisse.

Les élytres sont ovales-oblongues, un peu plus rétrécies vers l'extrémité qu'à leur partie antérieure; l'angle huméral est plus large que la base du corselet; il fait, en dessus, une légère saillie. Le rebord basal, déprimé au milieu, se relève un peu jusqu'aux épaules. La surface des élytres est assez plane; les stries sont bien marquées, fortement ponctuées, mais les points disparaissent après le milieu et vers l'extérieur; les intervalles sont légèrement convexes. La strie préscutellaire, peu longue, est située le long de la suture et très-parallèlement à celle-ci; elle ne touche pas la strie suturale qui part obliquement de la base de la 2e et se redresse après avoir dépassé l'extrémité de la strie préscutellaire. La 8e strie porte, au-dessous de l'épaule, 4 ou 5 gros points assez espacés, et, à sa partie inférieure, 7 ou 8 points semblables également disposés; ces deux séries sont distantes l'une de l'autre du tiers de la longueur de l'élytre. Le prosternum du ♂ porte au milieu une fossette oblongue fortement ponctuée. Les épisternes métathoraciques sont allongés et lisses de même que tout le dessous du corps. Dans les deux sexes, le dernier segment abdominal porte de chaque côté de l'anus deux points soyeux.

Les pattes sont grêles et garnies de poils épineux à leur partie externe; à l'intérieur les pattes intermédiaires et postérieures sont munies de poils plus longs. Le 1er article des tarses antérieurs est plus allongé que dans les *Curtonatus* et les crochets sont plus grêles et plus longs.

Comparée à l'*A. Rufescens*, elle est plus étroite; le corselet est un peu plus long, moins large en avant, mais proportionnellement plus large à la base; il est plus rétréci vers les angles antérieurs, plus fortement arrondi sur les côtés; en dessous du milieu, le bord marginal est simplement sinué et se dirige sur la base comme dans l'*A. Cordata;* les élytres sont aussi planes, mais un peu plus allongées; les stries sont un peu plus fines.

Sibérie. 3 ind. de Mr. de Chaudoir proviennent de la coll. Faldermann.

106. *A. Songarica.* Chaud. (coll.)

Bradytus latus. Motsch. Ins. Sib. 178.

Long. 12. — Lat. 5 $^{1}/_{4}$ mill.

Cette espèce diffère des autres sous plusieurs rapports importants. La dent du menton est tellement large et tellement courte qu'elle est, pour ainsi dire, réduite à un simple renflement de l'échancrure du menton. La languette, au lieu d'être tronquée au sommet, y est arrondie; les mandibules sont plus aiguës à l'extrémité, striées intérieurement; le labre est plus profondément échancré; les yeux ne sont nullement proéminents; les antennes (dont les 4 premiers articles seuls existent dans l'individu que j'ai sous les yeux) semblent être plus grêles; les deux impressions sur le devant de la tête sont plus larges et plus arrondies. Le corselet a beaucoup de rapports avec celui de la *Rufescens* mais les côtés se rétrécissent subitement plus loin des angles postérieurs qui, par suite, sont plus grands. Les élytres sont plus rétrécies à leur base : les stries sont très-fines et à peine distinctement ponctuées, mais cependant les intervalles ne sont pas aussi plans que dans l'*A. Longipennis*.

Dsoungarie. (1 seul ind. ♀. dans la coll. de M^{r}. de Chaudoir, provenant de la coll. Gebler.

Dans le *G. Amara*, il existe déjà
1° *C. Latus*. Fab. (A. Apricaria P.)
2° *H. Latus*. Gyll. (*A*. Consularis Dft.)
3° *A. Lata*. Sturm. (A. Ingenua Dft.)

Je n'ai donc pas pu conserver le nom sous lequel le présent insecte a été décrit par M^{r}. Motschulski, et j'y ai substitué celui sous lequel il figurait dans la coll. Gebler.

107. *A. Longipennis*. Chaud. B. M. 1844. 448.

Par la forme du corselet, cette espèce a beaucoup plus de rapport avec l'*A. Cordata* qu'avec la *Microdera;* elle est, du reste, plus grande; les élytres sont un peu plus allongées, mais surtout plus arrondies sur les côtés; le rebord basal se relève plus fortement vers les épaules; les stries sont beaucoup moins marquées, moins fortement ponctuées et les intervalles sont tout-à-fait plans.

Sibérie Or^{le} (M^{ts} Altaï.)

108. *A. Microdera.* Chaud. B. M. 1844. 447.

Brad. Angusticollis Motsch. Ins. Sib. 180. 322.

Encore moins large que la suivante; la tête est plus petite; le corselet, plus étroit, est moins arrondi sur les côtés qui se redressent beaucoup plus-tôt, c. à d. au dernier tiers; les épaules sont plus arrondies que dans l'*A. Cordata* et même que dans la *Rufescens;* les élytres sont un peu plus courtes et plus arrondies en dessous des épaules.

Sibérie Or^le^ (Mont. de l'Altaï.)

109. *A. Cordata.* n. sp.

Bradytus Cordicollis Chaud. B. M. 1844. 447.

M^r^. de Chaudoir ayant comparé cet insecte au *Bradytus Aurichaceus,* je pense qu'il sera utile d'en faire la comparaison avec l'*A. Rufescens.*

La couleur est la même c. à d. d'un brun de poix et plus souvent d'un brun testacé un peu plus rougeâtre sur la tête et le corselet; la tête est semblable; le corselet est plus long, plus étroit, plus arrondi sur les côtés qui se redressent à une plus grande distance de la base; les angles postérieurs sont donc plus grands et ils sont un peu plus aigus; les élytres sont plus convexes, beaucoup plus ovales; la saillie des épaules est plus relevée; les stries sont un peu plus profondes et les points plus gros.

Sibérie Or^le^ (Mont. de l'Altaï.)

Leirides.

(Voy. ci-dessus pag. 199.)

Épisternes métathoraciques très-courts, presque carrés, yeux très-fortement enchâssés en arrière. Strie préscutellaire courte. Ligne de gros points sur le 9^e^ intervalle à peine interrompue au milieu. Angles antérieurs du corselet prolongés en avant. Bord marginal des élytres s'élevant aux épaules.

A ceux qui croiraient que ces caractères n'ont pas une bien grande valeur, je répondrai : que toutes les coupes établies dans les *Amara* ne sont pas des genres véritables, mais des groupes plus ou moins homogènes; que, d'ailleurs, on n'a pas le droit de

se montrer bien difficile dans un genre où tous les caractères véritablement scientifiques manquent de fixité.

La pointe sternale est ordinairement terminée comme dans les *Curtonotus* : cependant, chez quelques espèces (*Pyrenaeus*, *Puncticollis*, *Cuniculinus* et *Alpicola*) elle est rebordée par un sillon et elle porte à l'extrémité deux points pilifères.

110. *L. Helopioides.* Heer. — *Schaum.* D. J. I. 508. 4.

Tyrol et Lombardie.

111. *L. Nobilis.* Duft. — Dej. Spec. III. 504. 74. *Schaum.* D. J. I. 509. 5.

Autriche Alpine.

112. *L. Spectabilis Schaum.* D. J. 510. 6.
L. Montanus Chaud. B. M. 1837. VII. 37.

Illyrie, Carniole, Croatie.

113. *L. Cardui.* Dej. Spec. V. 798. 74.

Suisse mérid., Piémont.

114. *L. Puncticollis.* Dej. Spec. III. 523. 62.

Pyrénées Or[les].

Cette espèce, que Dejean regarde comme étant la plus commune au Canigou, ne semble pas avoir été retrouvée.

115. *L. Pyrenaeus.* Dej. Spec. III. 524. 63.

C'est surtout à cet insecte que l'on pourrait appliquer ce que Dejean dit de l'*A. Puncticollis* « elle se rapproche, par la forme, » des *Argutor* de Megerle, et particulièrement de la *Feronia* » *Negligens.* » M[r] von Bruck m'en a communiqué des individus très-petits, à élytres plus convexes et dont le corselet est moins élargi au milieu et moins échancré au-dessus des angles postérieurs lesquels sont à peine saillants.

M[r] de Chaudoir en possède un dont le corselet est presque carré.

La taille varie de 7 $^1/_2$ à 10 mill.

116. *L. Calathoides.* Motsch. (in coll. Chaud.)

Long. 10. — Lat. 4 mill.

Niger, palpis, antennis pedibusque rufo-brunneis. Caput obsolete

punctulatum. Oculi parvi, parum prominuli. Prothorax subquadratus, longitudine latior, antice subangustatus, margine antico in medio truncato, angulis anticis prominulis, lateribus usque ad medium leviter arcuatis, in medio ipso dilatatis, ante basim sinuatis: angulis posticis deflexis, rectis; margine basali emarginato; basi depressa, subtiliter punctulata, foveolis duabus linearibus obliquis notata, quarum exterior carinata. Elytra oblongo-ovata, basi subtruncata, postice angustata, punctato-striata; tibiis intermediis subtus subdentatis.

Pour bien faire apprécier cet insecte, je crois devoir le comparer au *L. Helopioides* avec lequel il offre certains rapports, surtout en ce qui concerne la tête et le corselet.

Il est d'un noir profond, assez terne, surtout chez la ♀. Les palpes, les antennes et les pieds sont plus obscurs que chez le *Helopioides*. L'épistôme est moins régulièrement échancré, ses angles externes ne sont point avancés, mais arrondis. La tête est plus petite, les yeux sont moins grands et tout aussi peu proéminents; les antennes sont moins épaisses. On remarque, entre les yeux, une rangée de petits points depuis l'extrémité des fossettes interoculaires jusqu'au sommet du vertex. L'espace entre cet arc et l'épistôme est parsemé de points assez marqués. Le corselet est un peu moins convexe, moins large à la base et plus rétréci à l'extrémité. Les angles antérieurs sont plus avancés, plus aigus, plus relevés. Les côtés, bien que plus larges *au milieu*, sont moins arrondis; ils paraissent formés de deux segments qui se réunissent en ce point. Le rebord externe est moins épais; les angles postérieurs sont beaucoup plus plans, plus droits et même un peu prolongés extérieurement; l'impression basale interne est plus profonde, l'externe est plus arrondie et n'est bornée que par une carène presqu'indistincte. Les élytres sont un peu plus courtes, beaucoup plus larges aux épaules, d'où leurs côtés plus arrondis se rétrécissent jusqu'à l'extrémité. Leur surface, au lieu d'être convexe, est assez aplatie sur le dos. Les épaules, quoiqu'également presque saillantes, sont cependant moins relevées de même que la marge externe en dessous. Les stries sont encore plus profondes et leurs points sont plus gros. La strie préscutellaire est située de même, entre l'écusson et la strie suturale, mais cette dernière n'est pas réunie à sa base à la 2e. Les épisternes métathoraciques sont un peu moins courts. Les pattes sont plus

longues et plus minces. A la partie interne des tibias intermédiaires du ♂, on distingue plusieurs dents peu marquées.

Alpes du Caucase. — Coll. de Chaudoir. ♂ et ♀.

117. *L. Cuniculinus.* Dej. Spec. V. 798. 75. *Schaum.* D. J. I. 515. 12.

Styrie.

118. *L. Alpicola.* Dej. Spec. III. 508. 50. = *Schaum* D. J. I. 516. 13.

Les deux seuls ex. de la coll. Dejean viennent de Styrie.

Curtonotus Steph.

(Leirus Zimm.)

Zimmermann a caractérisé son genre *Leirus* de la manière suivante :

« Mente dente intermedio bifido; thorace cordato aut postice » angustato; tibiis intermediis maris intus bidentatis, posticis » utriusque sexus glabris. »

Cet insectes diffèrent donc des *Bradylus* par la non pubescence des tibias postérieurs des ♂ et par l'absence de dents à la partie interne des tibias intermédiaires dans le même sexe; ce dernier caractère est même le seul qui distingue les *Leiocnemis* des *Curtonotus.*

Il en résulte que lorsque l'on n'a sous les yeux que la ♀ d'un insecte appartenant à l'un de ces trois genres, il devient parfois très-difficile de découvrir auquel il faut la rapporter.

Mr de Chaudoir (Stett. E. Z. 1859. p. 129) a indiqué un caractère qui permettrait de reconnaître toujours un *Curtonotus:* c'est l'absence d'un rebord élevé à l'extrémité de la pointe du *prosternum;* c'est par erreur que Mr Schaum a mentionné l'existence de ce rebord élevé comme caractère *distinctif* des *Curtonotus* (D. J. I. 772. nº 508); sans être rigoureusement exact (en ce sens qu'il tend à disparaître dans quelques espèces p. ex. C. *Fodinae, Nitens, Tristis, Armeniacus,*) ce caractère peut-être fort utile dans les cas douteux.

Je place, à la suite des *Curtonotus,* la *Feronia Haematopus* Dej. qui, par sa forme générale devrait être classée près du *C. Alpinus.* Mais l'épaisseur remarquable de ses antennes

l'éloignent de toutes les espèces du genre auquel, cependant, elle appartient incontestablement.

119. *C. Convexicollis.* Chaud. (Coll.)

Long. 11. — Lat. 5. M.

Niger, nitidus, palpis antennisque testaceis, pedibus obscurioribus. Prothorax latus, tranversus, convexus, margine antico emarginatus, angulis anticis rotundatis, lateribus anguste marginatis arcuatis, prope basim emarginatis, angulis posticis acutis prominulis. Elytra oblongo-ovata, humeris prominulis.

D'un noir brillant, un peu métallique sur les élytres; palpes, antennes et bords du corselet testacés, pattes couleur de poix. Les yeux sont enchâssés en arrière. Le corselet est transversal, un peu rétréci vers les angles antérieurs qui sont largement arrondis; les côtés sont également plus arrondis que dans le *C. Transversicollis*, plus fortement sinués en dessus des angles postérieurs qui sont plus aigus et plus saillants; les côtés sont également déprimés; mais le rebord est un peu moins relevé; au milieu, le long du bord antérieur, on remarque quelques points peu serrés et peu profonds; toute la base est ponctuée, mais les points sont moins serrés que dans le *C. Transversicollis*; les deux fossettes sont plus distinctes. Les élytres sont proportionnellement moins larges, plus convexes; la marge de la base est déprimée au milieu, elle se relève jusqu'à l'angle huméral qui est ainsi plus saillant et nullement arrondi; la strie préscutellaire est un peu plus courte. Les premiers segments abdominaux sont moins fortement ponctués et les autres ne le sont pas du tout. Les dents situées en dessous des tibias intermédiaires sont d'égale longueur, aussi fortes que dans le *C. Aulicus*, mais séparées par une échancrure plus large et moins profonde.

La collection de M^r^ de Chaudoir ne renferme qu'un seul individu ♂ qui a été rapporté de Sibérie par M^r^. Gebler.

120. *C. Brevicollis.* Chaud. Bull. Mosc. 1850. 151.

Long. 10. — Lat. 4 ½ M.

Niger, nitidus, palpis, antennis pedibusque fulvis. Prothorax latus, transversus, antice posticeque leviter angustatus, angulis

anticis subrotundatis, posticis rectis; margine laterali explanato. Elytra oblongo-ovata, humeris subrotundatis.

Il diffère du *C. Transversicollis* par sa taille moindre, sa surface plus luisante et un peu plus verdâtre; son corselet un peu plus arrondi sur les côtés et dont les angles postérieurs sont moins aigus; les élytres un peu plus étroites, les épaules moins arrondies, le bord marginal légèrement sinué avant le milieu. Les épisternes métathoraciques, striés de chaque côté, sont parsemés de points peu nombreux et peu profonds. Les premiers segments abdominaux et les côtés des autres sont ponctués et ridés. Les deux dents situées en dessous des tibias intermédiaires sont peu distinctes et séparées par une échancrure large et peu profonde La collection de Mr de Chaudoir ne possède qu'un individu mâle originaire de la Sibérie orientale et qui fesait partie de la collection Faldermann.

Elle renferme en outre une variété de la même espèce, étiquetée du même nom par Mr de Motschulky. Elle vient du désert des Kirghises et se distingue du type par son corselet un peu plus large, plus arrondi sur les côtés et aux angles antérieurs; les angles postérieurs sont plus prolongés; les côtés des élytres sont plus fortement sinués avant le milieu, et les épaules sont un peu moins arrondies.

121. *C. Glacialis.* Mannerh. Bull. Mosc. 1853. 43. (Bradytus.

Long. 8. — Lat. 3 1/2 M.

Niger, iridescens; antennarum basi femoribusque rufis. Prothorax transversus, lateribus rotundatus, ante basim coarctatus, angulis posticis acutiusculis; superficie tota, medio excepto, rugose punctulata; basi oblique bifoveolata. Elytra ovata, in dorso planiuscula, leviter punctato-striata, interstitiis planis.

D'un noir brillant, avec des reflets verts et cuivreux. L'extrémité du dernier article des palpes, le dessous du 1er article des antennes ainsi que les cuisses (sauf leur extrémité) sont rougeâtres. Les yeux sont assez saillants, fortement enchâssés en arrière, bordés intérieurement par une carène élevée; les côtés de la tête portent quelques gros points; les deux impressions en arrière de l'épistôme sont anguleuses. Le corselet est large, court, transversal, échancré en avant, médiocrement arrondi sur les côtés jusqu'au dernier quart où le bord marginal

se redresse subitement pour former les angles postérieurs qui sont un peu plus aigus que droits, et relevés. Le rebord basal est tronqué au milieu et légèrement sinué sur les côtés; la base est déprimée et, de chaque côté, elle offre deux impressions, linéaires au fond, obliques et situées plus près du bord externe que dans les autres espèces; la carène au-dessus des angles postérieurs est peu large et peu distincte. Toute la surface du corselet (sauf le milieu) est parsemée de points assez gros se confondant parfois, mais qui sont plus rares au milieu du bord antérieur et au milieu de la base. Les élytres sont ovales; elles s'élargissent un peu vers le milieu : leurs épaules sont arrondies : les stries sont fines et régulières, et leurs points sont petits et assez espacés : la strie préscutellaire n'est pas très-longue. Les épisternes métathoraciques sont fortement ponctués. La dent inférieure des tibias intermédiaires est plus distincte que l'autre.

Mannerheim place cette espèce dans le genre *Bradytus*. Il n'en avait sans doute pas vu le ♂ dont les pattes postérieures sont glabres intérieurement.

Bords de la mer glaciale. 1 ♂. (coll. de Chaudoir.)

122. *C. Nitens.* Nov. Sp.

Long. 11 $^1/_2$. — Lat. 5. M.

Niger, nitidus, palpis, antennis tarsisque piceis. Prothorax antice emarginatus, lateribus explanatis rotundatis ante basim sinuatis, basi angustatus, angulis anticis subprominulis, rotundatis, posticis rectis, apice tantum extus prominulo. Elytra oblongo-ovata, convexa, profunde striata, humeris subprominulis.

D'un noir brillant, quoique l'individu que j'ai sous les yeux soit une femelle; les palpes, les antennes et les pattes sont bruns.

La tête est plus petite que chez le *C. Aulicus*, les yeux sont un peu moins saillants; le dernier article des palpes est plus large.

Le corselet est plus large que long, plus étroit à la base qu'à l'extrémité; les angles antérieurs sont avancés et arrondis; les côtés, dont la plus grande largeur est un peu avant le milieu sont arrondis jusqu'au dessus des angles postérieurs où ils descendent droit sur la base; ces angles ne sont point saillants; toute la base est couverte de gros points serrés, de même que le milieu du bord antérieur; le sillon longitudinal est profond et ridé; les

côtés du corselet sont largement déprimés et ponctués; le rebord est épais et relevé.

Les élytres sont à peine plus larges que le milieu du corselet, légèrement sinuées sur les côtés; le rebord basal descend depuis l'écusson jusqu'à l'angle huméral qui est presque droit; les stries sont très-profondes et fortement ponctuées; les intervalles sont assez convexes; la strie préscutellaire est un peu plus courte que chez le *C. Aulicus*. Les épisternes métathoraciques sont striés de chaque côté et très-fortement ponctués de même que les côtés de l'abdomen.

La collection de M^r^ de Chaudoir ne renferme qu'un seul individu femelle. Il est indiqué comme provenant de la Chine boréale.

123. *C. Fulvipes.* Chaud. (coll.)

Long. 10. — Lat. 4 $^1/_2$ M.

Niger, nitidus, palpis, antennis pedibusque dilute rufis. Prothorax lateribus rotundatis nec sinuatis, antice posticeque angustatus, angulis anticis prominulis rotundatis, posticis acutis prominulis. Elytra oblongo-ovata, antice subtruncata, postice angustata, humeris obtuse angulatis.

D'un noir brillant. Les palpes, antennes (sauf la base des art. 2—4) et les pattes sont fauves. Les yeux sont peu saillants. Le corselet est un peu plus court que large, plus étroit à la base; les angles antérieurs sont saillants et arrondis; les côtés sont arrondis, se rétrécissent légèrement à partir du milieu et sont sinués avant les angles postérieurs qui sont aigus et saillants; les deux fossettes de la base sont assez arrondies, profondes, fortement ponctuées et assez distinctement séparées par une carène irrégulière; le milieu de la base n'est pas ponctué; les côtés sont un peu déprimés, rugueux; le rebord marginal est aussi épais, quoiqu'un peu moins relevé que dans le *C. Aulicus*.

Les élytres sont ovales, un peu élargies en avant; le rebord marginal est déprimé au milieu, il se relève vers l'angle huméral qui est un peu saillant : les stries sont profondes et fortement ponctuées, leurs intervalles sont un peu convexes. Les épisternes métathoraciques, fortement ponctués, sont sillonnés de chaque côté. Les deux premiers segments abdominaux sont couverts de gros

points; les autres, fovéolés sur les bords, ne portent que des points plus petits et moins profonds.

Les dents en dessous des tibias intermédiaires sont d'inégale longueur; celle du dessus est de beaucoup plus forte que l'autre.

M^r^ de Chaudoir possède un ♂ venant des États-Unis (Missouri.)

124. *C. Transversicollis.*

Long. 12. 13. — Lat. 5 ½. 6 M.

Niger, palpis, antennis pedibusque testaceis, tibiis obscurioribus. Prothorax transversus, ad angulos anticos rotundatos subangustatus, postice sinuatus, angulis anticis prominulis, medio excepto punctulatus, ad margines explanatus. Elytra pronoto latiora, oblongo-ovata, humeris rotundatis.

Noir ou noir brunâtre, légèrement verdâtre sur les élytres; des palpes, les antennes, les pattes et les bords du corselet sont l'un testacé rougeâtre; les tibias sont d'une teinte un peu plus foncée.

Les yeux ne sont nullement enchâssés en arrière; la tête est parsemée de points et de rides très-apparents, mais peu profonds. Le corselet, en carré transversal, également rétréci en avant et en arrière; le bord antérieur est coupé droit; les angles sont arrondis; les côtés sont régulièrement arqués jusqu'au de là du milieu; un peu avant les angles postérieurs, ils se rétrécissent légèrement et tombent droit sur la base; les angles postérieurs sont cependant un peu aigus; le bord postérieur est tronqué, mais abaissé au point où aboutissent les deux fossettes, ce qui le fait paraître bi-sinué. Les côtés sont déprimés; le rebord est assez élevé. Le bord antérieur, les côtés et la base du corselet sont couverts de points assez serrés qui sont plus gros dans les deux fossettes de la base; l'intervalle entre la carène externe et le bord marginal est même ponctué; la fossette interne est peu distincte.

Les élytres sont de moitié plus larges que le corselet, en ovale allongé, peu convexes; le rebord basal remonte depuis l'écusson jusqu'à l'angle huméral qui est arrondi; le bord marginal est assez large. Les stries sont profondes et ponctuées; les intervalles sont assez plans; les 3^e^ et 5^e^ sont un peu moins larges que les autres. Les épisternes métathoraciques, sillonnés de chaque côté, portent

des points épars. Les premiers segments abdominaux et les côtés des autres sont couverts de points serrés.

Les deux dents en dessous des tibias intermédiaires sont à peine marquées; l'échancrure qui les sépare est large et peu profonde.

Amér. Russe. (Akina) 2 ex. dans la coll. de Chaudoir.

125. *C. Harpaloides.* Dej. III. 514. 55.

Long. 11. 12.—Lat. 5. 5 $^1/_4$ M.

Niger aut piceus, palpis antennisque rufo-piceis, harum basi rufa. Prothorax subtransversus postice angustatus, lateribus ante medium maxime rotundatis, post medium sinuatis, angulis anticis prominulis rotundatis, posticis acutis. Elytra oblongo-ovata, humeris prominulis.

D'un brun noirâtre; tête, corselet, cuisses et tibias noirs; palpes, antennes et pattes d'un testacé rougeâtre.

Les yeux sont enchâssés en arrière. Le corselet est transversal, de même largeur à la base qu'à l'extrémité; les côtés sont arrondis jusqu'au-dessus des angles postérieurs, puis sinués; les angles antérieurs sont légèrement avancés et arrondis; les angles postérieurs sont aigus et proéminents; la base est bi-sinuée; elle est entièrement couverte de points, plus gros et plus serrés dans les deux fossettes; on remarque aussi quelques points, mais moins gros et moins profonds, le long du bord antérieur. Les côtés sont plus largement déprimés et beaucoup moins ponctués que dans le *C. Aulicus*, mais le rebord est moins épais.

Les élytres sont oblongues-ovales, presque parallèles; le rebord basal va droit sur l'angle huméral, lequel n'est que légèrement relevé, mais saillant; le rebord marginal est un peu moins large que chez le *C. Aulicus*.

Les épisternes métathoraciques, striés de chaque côté, sont parsemés de points fort inégaux en grosseur; les deux ou trois premiers segments abdominaux sont ponctués sur les côtés. Les tibias intermédiaires portent en dessous deux dents bien marquées et presqu'égales.

La ♀ est plus large, elle a les couleurs beaucoup plus ternes et les stries des élytres moins profondes.

M^r Motschulsky (Ins. de Sib. p. 175) dit que la ponctuation des stries sur les élytres n'est visible qu'avec une forte loupe. J'ai

sous les yeux les exemplaires sur lesquels Dejean a fait sa description où il indique la ponctuation comme *assez forte, surtout à la base :* en effet les points des stries ne sont qu'un peu plus petits que dans le *C. Aulicus.*

Les exemplaires de la collection Dejean sont indiqués comme venant de Sibérie. Mr Motschulsky dit que cette espèce, qui habite de préférence les contrées montagneuses, se trouve dans l'Altaï, et au delà du Baïcal, mais que les exemplaires de cette dernière localité sont plus petits.

126. *C. Fodinae.* Mannerh. in Humm. Ess. ent. IV. p. 20.

Dej. Sp. III. 518.

C. Altaïcus. Motsch. Ins. Sib. 174, 309.

Long. 12. — Lat. 4 $^3/_4$ M.

Piceus, palpis, antennis pedibusque rufis. Prothorax subtransversus, angulis anticis lateribusque angustissime marginatis rotundatis, ante angulos posticos rectos constrictus. Elytra oblongo-ovata, humeris elevatis.

Cette espèce est une des plus répandues et des mieux connues. La granulation très-fine dont elle est couverte la fait paraître un peu terne ; les épisternes métathoraciques sont lisses ou très-faiblement ponctués : les dents en dessous des tibias intermédiaires sont extrêmement petites et peu saillantes. La taille varie et même aussi la forme du corselet qui est parfois plus allongé et plus déprimé vers les angles antérieurs, ce qui le fait paraître plus étroit en avant. Je possède un individu de cette dernière variété que j'ai reçu de Mr Motschulsky sous le nom de *L. Parviceps* Mannerh. ; les angles postérieurs du corselet sont moins saillants que dans le type et les épaules sont plus élevées.

127 *C. Adstrictus.*

Long. 13. — Lat. 5 $^3/_4$.

Piceus, palpis, antennis, pedibusque rufis. Prothorax convexus, subcordatus, usque ad angulos posticos lateribus rotundatus, hisce acutis prominulis. Elytra lata, ovata, humeris subrotundatis.

Couleur de poix en dessus, avec le devant de la tête, les palpes,

les antennes, les pattes et le dessous du corps d'un brun roussâtre: la teinte des cuisses est un peu plus claire.

Les yeux sont beaucoup moins saillants que chez le *C. Aulicus;* le corselet est un peu plus court et plus large que dans cette espèce, moins échancré au bord antérieur, plus arrondi sur les côtés, ceux-ci se rétrécissant plus fortement dès après le milieu; les angles antérieurs sont un peu plus arrondis; les angles postérieurs, formés moins brusquement, sont cependant au moins aussi aigus; la ponctuation de la base, du bord antérieur et des côtés, est la même: ces deux derniers sont un peu moins déprimés et le rebord marginal est moins épais; il n'est point intterrompu contre la carène près des angles postérieurs. Les élytres sont un peu plus larges que le milieu du corselet, ovales-alongées; le rebord basal est coupé droit et les épaules sont presqu'arrondies; le rebord marginal est un peu moins large et moins épais. Les épisternes métathoraciques sont fortement striés de chaque côté; leur ponctuation est moins épaisse et plus faible que dans le *C. Aulicus.* Les deux premiers segments de l'abdomen sont assez légèrement ponctués.

2 ex. ♂ et ♀ dans la collection de Mr de Chaudoir, indiqués comme provenant des États-Unis et étiquetés *Laticollis*?

La comparaison que Le Conte fait de son espèce avec l'*A. Convexiuscula* me paraît démontrer qu'il s'agit d'un insecte tout différent du nôtre.

128. Le *C. Aulicus* est le type d'un petit groupe assez nettement caractérisé par le rebord marginal qui est interrompu un peu au-dessus des angles postérieurs, ainsi que par la présence d'une troisième dent assez petite à la partie inférieure des tibias intermédiaires du mâle.

Je ne connais encore que deux espèces qui présentent ces particularités :

La première : *C. Aulicus.* (Panz.-Dej. Spec. III. 515. 56. — Schaum. D. J. I. 511. 7.) a le corselet convexe, large et fortement arrondi sur les côtés jusqu'à la naissance des angles postérieurs.

Le *L. Caucasicus.* Motsch. (Ins. Sib. 78.) est une variété à élytres plus courtes et plus convexes.

Une seconde variété a été recueillie au Caucase par Mr de

Chaudoir; elles a le corselet plus étroit, beaucoup moins arrondi: sa plus grande largeur est avant le milieu : le rebord marginal est moins relevé; les stries sont plus profondes et leurs intervalles plus convexes. Les quatre individus que j'ai vus dans la coll. de M^r^ de Chaudoir sont de plus petite taille et plus noirs que l'*Aulicus*.

129. La 2^e^ espèce : *C. Gebleri* Dej. (V. 799.) se distingue de l'*Aulicus* par son corselet beaucoup moins rétréci en avant et surtout en arrière; le bord antérieur est moins échancré, les angles postérieurs sont beaucoup plus petits; les points au milieu du bord antérieur sont moins nombreux; les stries des élytres plus profondes et les intervalles plus convexes; les palpes, les antennes et les pattes sont plus obscurs. De même que dans le *C. Aulicus*, les épisternes métathoraciques ne sont pas striés extérieurement. Cette espèce vient de Sibérie.

C'est au *C. Gebleri* qu'il faut rapporter le *C. Uralensis* Motsch. décrit trop sommairement dans les Russi. Kaef. (p. 62 note I), mais dont M^r^ de Chaudoir et moi-même avons reçu des exemplaires de M^r^ Motschulsky.

130. *C. Bistriatus*. Chaud. (coll.)

Long. 12. 13. — Lat. 4 $^3/_4$ M.

Piceo-subaeneus, palpis, antennis pedibusque rufis. Prothorax convexiusculus, subcordatus, lateribus anguste marginatis, antice subrotundatus, angulis posticis acutis subreflexis. Elytra subcylindrica humeris subrotundatis.

Très-voisin de *C. Convexiusculus* dont il diffère par le corselet un peu moins convexe, moins dilaté et moins arrondi sur les côtés avant le milieu, moins rétréci au dessus des angles postérieurs qui sont plus droits et moins saillants; la base est un peu plus large; les élytres sont un peu plus courtes, les épaules moins arrondies et légèrement saillantes; les stries ont moins de profondeur et les intervalles sont un peu plus plans. Les deux dents en dessous des tibias intermédiaires sont très-peu marquées.

La femelle est un peu plus large et moins convexe que le mâle.

Lenkoran.

131. *C. Reflexus.* Chaud. (Coll.)

Long. 10 ½. 13. — Lat. 4 ½. 5 ¼ M.

Niger, palpis, antennis, pedibusque rufis. Prothorax subcordatus, angulis anticis prominulis, posticis subacutis reflexis, margine laterali anguste marginato. Elytra oblonga humeris rotundatis.

Très-voisin du *C. Convexiusculus.* D'un noir un peu moins bronzé sur les élytres. L'épistôme est moins ridé longitudinalement. Le corselet, de même longueur et tout aussi convexe, est plus large et moins cordiforme; le bord antérieur est moins échancré; les angles sont plus largement arrondis; les côtés sont plus arrondis et ne sont sinués qu'à la naissance des angles postérieurs; leur plus grande largeur est au milieu, tandis que dans le *C. Convexiusculus* elle est au premier tiers. Le bord basal est plus fortement sinué; il est très-distinctement réfléchi à partir de l'impression interne et les angles sont un peu plus aigus; la base elle-même est moins déprimée au milieu; les fossettes latérales sont plus distinctement linéaires; la carène est moins rapprochée du bord marginal. Les élytres ont des stries un peu moins profondes et les épaules sont moins arrondies. Les épisternes métathoraciques sont un peu plus larges, moins distinctement striés extérieurement et plus fortement ponctués. Les deux dents en dessous des tibias intermédiaires sont fortes, mais l'inférieure est un peu moins longue que l'autre.

5 individus venant de Terre-Neuve (St-Pierre-Miquelon). 1 ex. ♀ de la même localité, dans la coll. Chevrolat.

132. *C. Contractus.* Chaud. (Coll.)

Long. 12. — Lat .4 ¾ M.

Piceus, palpis antennisque basi testaceis. Prothorax subcordatus, lateribus explanatis modice rotundatis, angulis posticis acutiusculis. Elytra oblonga humeris subrotundatis.

La tête et le corselet couleur de poix, les élytres et les pattes brunes, les palpes et les deux premiers articles des antennes testacés.

La tête est un peu plus large en arrière que celle du *C. Convexiusculus;* le corselet est plus large sur les côtés et à la base;

les angles antérieurs sont plus arrondis; les côtés se rétrécissent beaucoup moins après le milieu; les côtés sont déprimés; la base est moins déprimée au milieu : le milieu du bord antérieur n'est point ponctué et beaucoup moins déprimé.

Les élytres sont à peu près semblables, mais un peu moins convexes et plus larges; les épaules sont un peu plus marquées. Les épisternes métathoraciques, dont la strie externe est plus courte, ne portent que quelques points sur leur côté interne. Les deux dents placées dans le ♂ en dessous des tibias intermédiaires sont bien marquées, surtout la dent supérieure.

La collection de Mr de Chaudoir renferme plusieurs exemplaires de cette espèce : les uns, provenant de Mr Ménétriés et indiqués de Sibérie; un autre portant une étiquette de Dejean sous le nom de *A. Corpulenta.* Esch. Sibérie; enfin deux autres inscrits par Mr Motschulsky, l'un comme *L. Sibiricus* Motsch. (Sibérie Occidentale), l'autre comme *L. Vicinus* Esch. (Désert des Kirghises.)

133. *C. Substriatus.* Reich. (In coll. Chaud.)

Long. 13. — Lat. 5 1/2 M.

Ater, nitidus. Prothorax convexus, subcordatus, antice posticeque punctulatus. Elytra oblongata ovata leviter punctato-striata.

D'un noir profond, brillant, avec le 1er article des antennes et la base des palpes d'un brun testacé; les autres articles des antennes, les bords du labre et les tarses bruns.

Les mandibules sont plus épaisses, moins aiguës que chez le *C. Aulicus;* elles ne portent quelques petites stries que vers leur extrémité intérieure. Les deux impressions entre les yeux sont très-profondes; les yeux sont peu proéminents et non enchâssés. Le corselet est très-convexe, très-brièvement cordiforme. Le bord antérieur est largement échancré; les angles antérieurs sont plus arrondis que dans le *C. Aulicus;* les côtés, finement rebordés, sont arrondis jusqu'au delà du milieu, puis prolongés jusqu'au dessus des angles postérieurs où ils tombent droit sur la base; la plus grande largeur est avant le milieu; les angles postérieurs sont aigus et dirigés un peu en arrière; les impressions de la base sont profondes, rapprochées l'une de l'autre, tellement que l'interne est plus près du bord marginal que du centre du corselet; elles sont

fortement ponctuées : le milieu de la base, de même que l'impression transversale antérieure, sont couverts de points plus petits dans lesquels disparaissent les deux extrémités du sillon longitudinal.

L'écusson est grand, triangulaire, avec les côtés arrondis.

Les élytres sont en ovale allongé, légèrement sinuées sur les côtés avant le milieu, où elles s'élargissent un peu ; leur surface est plus convexe que dans le *C. Aulicus :* les stries sont très-fines et vont encore en s'atténuant vers l'extrémité et vers les bords où elles sont à peine visibles ; leurs points sont petits, espacés.

Les épisternes métathoraciques sont fortement striés de chaque côté et lisses ; les premiers segments abdominaux sont parsemés de quelques points. La dent supérieure des tibias intermédiaires est très-forte ; l'inférieure est plus faiblement marquée.

La collection de Mr de Chaudoir renferme quatre individus ♂ et ♀ sous le nom de *Melaneimon Substriatus Reiche.* Ils viennent du Mexique.

154. *C. Somnolentus.* Nov. Sp.

Long. 12. — Lat. 5 M.

Niger, elytris aenescentibus ; palpis, antennis pedibusque fuscis. Prothorax subcordatus, angulis posticis acutis subreflexis, margine laterali anguste marginato, foveolis posticis profundioribus. Elytra subcylindrica humeris rotundatis.

Extrêmement voisin du *C. Convexiusculus* dont il ne diffère que par des points suivants : le corselet est plus convexe, plus régulièrement arrondi sur les côtés qui ne se redressent qu'aux angles postérieurs lesquels sont moins grands ; la plus grande largeur du corselet est au milieu ; les angles antérieurs sont plus déprimés, plus arrondis ; la base est plus échancrée au milieu ; les points qui la couvrent sont plus gros et remontent plus haut ; les deux fossettes sont plus profondes, plus séparées l'une de l'autre ; la fossette interne est plus longue. Les élytres sont un peu plus larges, les épaules plus arrondies. Les épisternes métathoraciques sont plus fortement ponctués. La dent supérieure des tibias intermédiaires est très-forte ; l'inférieure est à peine marquée.

Un ♂, venant d'Ounalaschka, dans la collection de Mr de Chaudoir. J'en possède une ♀ provenant de la même localité.

135. *C. Castaneus.* Chaud. (Coll.)

Long. 9 — 11. — L. 3 $^{1}/_{2}$ — 4 $^{1}/_{3}$ M.

Elytra picea vel brunnea nitida; palpis, antennis pedibusque rufis. Prothorax subcordatus, antice rotundatus, angulis posticis rectis. Elytra oblonga, humeris subprominulis.

Les élytres sont d'un noir de poix brillant qui est plus brun dans les individus récemment transformés; les parties de la bouche, les antennes et les pattes sont d'une teinte beaucoup plus claire.

Le bord antérieur du corselet est coupé plus droit que dans le *C. Convexiusculus;* les angles antérieurs sont un peu plus avancés; les côtés antérieurs sont tout aussi arrondis, mais leur plus grande largeur est au milieu, tandis que dans le *Convexiusculus* elle se trouve au premier tiers; en dessous du milieu, les côtés sont beaucoup moins sinués; les angles postérieurs sont un peu moins saillants. La base est ponctuée et fovéolée de même; on remarque quelques points au milieu, le long du bord antérieur. Les élytres sont plus courtes, moins convexes, plus profondément striées et ponctuées; le rebord basal se relève moins vers l'angle huméral qui est plus marqué; les épisternes métathoraciques sont plus fortement ponctués. Les dents des tibias intermédiaires sont bien marquées, mais l'inférieure est beaucoup moins longue que l'autre.

Désert des Kirghises. (Collection de Chaudoir ♂ et ♀.)

136. *C. Convexiusculus.* Marsch.

Dej. Sp. III. 517. 57. — Schaum.

D. J. I. 512. 8. (Excl. Syn. ult.)

137. *C. Intermedius.* Motsch. Ins. Sib. p. 175.

Long. 10. — Lat. 4 $^{2}/_{3}$ M.

Niger, nitidus, elytris subaenescentibus; palpis, antennis pedibusque rufis. Prothorax subcordatus, margine antico parum dilatato, postice subsinuato, angulis posticis acutis. Elytra subcylindrica, humeris obtusis.

Plus petit que le *C. Convexiusculus,* proportionnellement un peu plus court; les yeux sont plus saillants : les deux fossettes de la

tête sont plus courtes, plus arquées; les côtés du corselet sont moins dilatés, moins arrondis au-dessous du milieu, moins échancrés au-dessus des angles postérieurs qui sont cependant plus aigus.

Les élytres sont plus profondément striées et ponctuées. Le dessous du corps est comme dans le *C. Convexiusculus*. Les dents des tibias intermédiaires sont d'égale force.

Lacs salins dans les steppes des Kirghises. (Coll. de Chaudoir ♂ et ♀.)

138. *C. Desertus*. Krin. Bull. Mosc. 1831. 83. Tab. VIII. F. 2.

Leirus Volgensis. Chaud. Bull. Mosc. 1850, 149.

Long. 12. — Lat. 4 $^{3}/_{4}$.

Niger, nitidus, elytris subaenescentibus; palpis, antennis pedibusque dilute brunneis. Prothorax transversim subcordatus, antice posticeque angustissimo, in medio dilatato, angulis posticis rectis. Elytra oblongo-ovata, humeris prominulis.

Il a beaucoup de rapports avec le *C. Cribricollis;* mais la tête et le corselet ne sont pas ponctués : la tête est un peu moins large et les yeux sont moins saillants. Le corselet est moins large au milieu, également rétréci à ses deux extrémités, par conséquent, il est moins cordiforme; les deux impressions de la base sont très-distinctes, surtout l'interne qui remonte plus haut que l'autre; les points de la base sont peu serrés, surtout au milieu; le sillon longitudinal est moins profond; il n'y a pas de points le long du bord antérieur; les côtés ne sont pas déprimés; le rebord est tout aussi étroit que dans l'*A. Convexiuscula*. Les élytres sont en ovale allongé, moins étroites que dans cette dernière espèce, plus larges à l'extrémité que dans le *C. Cribricollis;* les stries et leurs points sont un peu plus forts que dans la *Convexiuscula*, les épaules sont plus relevées et moins arrondies. En dessous, le corselet est lisse; les épisternes métathoraciques, bistriés, sont fortement ponctués de même que les côtés des segments abdominaux. Les dents des tibias internes sont assez écartées l'une de l'autre; l'échancrure entre elles est peu profonde.

Sarepta. (Coll. de Chaudoir ♂ et ♀.)

M^{r} *Schaum* (D. J. I. 512. 8.) rapporte par erreur cette espèce au *C. Convexiusculus*.

139. *C. Cribricollis.* Chaud. Carab. du Cauc. p. 231.

Long. 11 $^{1}/_{5}$. — Lat. 4 $^{3}/_{4}$ M.

Niger nitidissimus; capite thoraceque grosse punctatis; palpis antennisque brunneis, pedibus rufis. Prothorax transversim subcordatus. Elytra oblongo-ovata; in dorso planiora, humeris elevatis angulatis.

Je n'ai rien à ajouter à la description de M^{r} de Chaudoir, si ce n'est que le rebord basal des élytres est plus épais, surtout vers l'angle huméral qui est beaucoup plus relevé et plus saillant que dans le *C. Convexiusculus.* Les dents des tibias intermédiaires sont comme dans cette dernière espèce.

Crimée. (Coll. de Chaudoir.)

140. *C. Megacephalus.* Gebler.

Ledeb. R. p. 40 et Bull. Mosc. 1847. 344.

Long. 10 $^{1}/_{2}$ — Lat. 4 $^{3}/_{4}$ M.

Testaceo-fulvus. Caput maximum, oculi vix prominuli. Prothorax convexus, transversus, lateribus anticis rotundatis, posticis angustatis, angulis posticis rectis subreflexis; basi obscure bifoveolata modiceque punctata. Elytra subcylindrica, parum profunde punctato-striata, humeris rotundatis.

Entièrement d'un fauve testacé. Tête très-grosse; les yeux ne sont nullement saillants, presqu'aplatis; les deux fossettes entre eux sont plus rondes et plus profondes que dans les autres espèces, et entre elles on en remarque une autre triangulaire. Le corselet est court, presque cordiforme; il est, en avant, de la largeur de la tête; le bord antérieur est largement échancré, les angles sont très-arrondis, et les côtés sont très-régulièrement et fortement arrondis jusqu'au dessus des angles postérieurs qui sont parfaitement droits. La partie postérieure du corselet est moins largement mais plus fortement déprimée que d'ordinaire; elle est médiocrement ponctuée dans les deux impressions qui sont peu distinctes, et presque lisses au milieu. Le sillon longitudinal, quoiqu'étroit, est profond; le sillon transversal antérieur est très-distinct dans toute son étendue. Les carènes des angles de la base sont à peine marquées.

Les élytres, en ovale allongé, légèrement sinuées sur les côtés, ont les épaules arrondies; les stries sont peu profondes, surtout extérieurement, et sont très-faiblement ponctuées. Les épisternes métathoraciques sont striés sur chacun de leurs côtés, et parsemés de quelques points. Les deux dents placées en dedans des tibias intermédiaires sont très-faiblement indiquées.

Sibérie. Mr de Chaudoir possède un ♂ venant de la collection Gebler.

141. *C. Armeniacus.* Motsch. Bull. de Mosc. 1839 nº 1 p. 83. Tab. VI. F. 4.

Long. 11 $^1/_5$— Lat. 5 M.

Testaceo-fulvus. Prothorax convexus transversus postice angustatus angulis anticis deflexis rotundatis, posticis rectis prominulis. Elytra ovata parum profunde punctato-striata, humeris subrotundatis.

D'un fauve rougeâtre avec les mandibules, le labre, l'épistôme, les côtés du corselet et des élytres ainsi que la suture finement bordés de brun. La tête est de même largeur que celle de l'*Aulicus;* les yeux sont moins saillants; la partie postérieure de l'épistôme porte une fossette transversale : les deux fossettes entre les yeux sont moins larges, mais plus rondes; le corselet est un peu plus court et plus large; les côtés sont moins arrondis et se rétrécissent moins aux deux extrémités; le bord antérieur est moins échancré et les angles sont plus arrondis; les angles postérieurs sont beaucoup plus petits et moins saillants; la surface est plus convexe; les côtés ne sont que très-faiblement déprimés et le rebord externe est un peu moins relevé et beaucoup moins épais; la base est entièrement couverte de points moins gros et qui ne s'avancent pas autant; il n'y en a que fort peu le long du bord antérieur; le sillon longitudinal est à peine distinct.

Les élytres sont de moitié plus larges que le corselet, ovales, ayant les épaules arrondies et l'extrémité un peu moins sinuée que dans l'*Aulicus;* les stries sont beaucoup plus fines, plus faiblement ponctuées et les intervalles sont tout-à-fait plans. Les épisternes métathoraciques, striés le long de leurs bords, ne portent que quelques points à peine distincts.

Arménie. (un individu ♀ étiqueté de la main de Mr Motschulsky).

142 à 151.

Ce groupe se compose d'insectes de plus petite taille; on y remarque deux formes.

Dans l'une le corselet fortement arrondi sur les côtés un peu avant le milieu et se rétrécissant ensuite jusqu'aux angles postér. ayant les angles antér. très-déprimés et largement arrondis, a la forme d'un cœur tronqué dans sa moitié inférieure. Le milieu du bord antér. est ord. légèr^{t}. relevé au centre; les deux imp^{ons}. de la base sont profondes et la base elle-même est fortement sinuée : ses deux moitiés extérieures sont plus ou moins réfléchies : des points assez nombreux occupent l'imp^{on} transv^{le} antérieure. Les épaules sont arrondies et les stries sont moins profondes et moins ponctuées; les deux dents placées en dessous des tibias int. des ♂ sont très-marquées, surtout la dent supér. La plupart des esp. sont noires ou brun foncé, avec les patt es de même couleur et la base des art. 2—4 des ant. plus ou moins foncées.

Dans la 2^{e} forme, le corselet est moins rétréci vers la base, moins arrondi sur les côtés et ses angles antér. sont moins réfléchis et moins arrondis; les côtés de la base ne sont point réfléchis.

La coloration est ord. brune.

La ponctuation du corselet, la forme des élytres, leurs stries, la disposition des dents aux tibias int. sont les mêmes que dans la 1re forme.

142. *C. Torridus.* Illig. I. 173.

Dej. III. 520.

Dauricus. Motsch. Ins. Sib. p. 177.

Long. 10. — Lat. 4 $^{1}/_{2}$ M.

Nigro-piceus, palpis antennisque rufis (hisce articulis 3—5 basi piceis). Prothorax antice atque post medium lateribus angustatus, angulis posticis rectis. Elytra oblonga, humeris subrotundatis.

Noir ou brun; antennes testacées, avec les articles 3—5 d'un noir brun à la base; les articles des palpes sont également plus foncés dans leur première moitié; les tarses sont fauves. Le corselet est court, transversal, de la même largeur à la base qu'en avant; le bord antérieur légèrement échancré, les angles arrondis, les côtés très-régulièrement arqués jusqu'au delà du milieu où ils se rétrécissent un peu jusqu'au dessus des angles postérieurs qui sont

assez grande; la base est largement échancrée de manière que les angles postérieurs sont réfléchis; les deux impressions basales sont profondes, surtout l'intérieure; le milieu de la base est faiblement ponctué; l'impression transversale le long du bord antérieur l'est à peine. Les élytres sont ovales, les épaules arrondies. Les dents des tibias intermédiaires sont bien marqués, surtout la supérieure. Les épisternes métathoraciques sont ponctuées, distinctement striés au côté interne; la strie externe est peu marquée.

Le *C. Torridus* habite l'Europe boréale.

Il me paraît impossible d'en séparer le *C. Dauricus*, qui est plus petit et se trouve au-delà du lac Baïcal. J'en possède un ♂ étiqueté par Mr Motschulsky lui-même.

143. *C. Melanogastricus.* Dej. III. 519. 59.

144. *C. Eschscholtzii.* Chaud. Bull. Mosc. 1837 n° 7.

Lorsqu'en 1837, Mr de Chaudoir a établi cette dernière espèce, il en a indiqué les caractères par la comparaison avec le *C. Melanogastricus* Dej., insecte, en effet, très-voisin. Mais, à cette époque, il ne possédait pas le type de l'espèce de Dejean.

Aujourd'hui que les types des *A. Melanogastrica* et *Eschscholtzii* se trouvent réunis dans la même collection et que je les ai tous les deux sous les yeux, je puis indiquer avec plus de précision les différences qui caractérisent les deux espèces.

La tête est exactement la même. Le corselet est un peu plus large, plus court et plus convexe dans le *C. Eschscholtzii*, un peu plus arrondi sur le milieu du bord marginal qui est moins largement rebordé; les angles postérieurs sont un peu plus petits, moins saillants; la base est plus déprimée et ses côtés, en dessous des deux fossettes basales, sont plus prolongés en arrière. La ponctuation est la même. Les élytres sont plus courtes. Le rebord basal qui, dans le *Melanogastricus, descend* vers l'épaule, *remonte* au contraire un peu dans l'*Eschscholtzii;* chez ce dernier, les épaules sont moins arrondies.

Le *C. Melanogastricus* (Long. 11.— Lat 4 $^1/_2$ M.) est noir de poix, d'un noir brillant en dessous; les élytres sont d'un brun assez clair; les palpes, les antennes et les pattes sont d'un testacé rougeâtre.

Le *C. Eschscholtzii.* (Long. 10. Lat. 4 $^1/_3$ M.) est d'un noir brillant (terne dans la ♀) : les élytres sont un peu couleur de poix; les deux premiers articles des antennes et la base des suivants, la base des tibias et les tarses sont d'un testacé rougeâtre, le milieu des derniers articles des palpes et des cuisses est brunâtre.

Comparé au *C. Torridus*, le *C. Eschscholtzii* est plus grand, surtout plus large, le corselet est plus court, les angles postérieurs sont moins saillants, les côtés sont plus largement arrondis; les deux fossettes de la base sont moins distinctes l'une de l'autre; les palpes, entièrement testacés dans le *Torridus*, sont ici bruns en partie; la tête paraît moins brillante et plus terne, à cause d'une granulation extrêmement fine qui la couvre.

La collection de M^r de Chaudoir renferme les deux sexes de chacune de ces espèces qui, l'une et l'autre, habitent les possessions Russes de l'Amérique du Nord (Sitka-Kamtschatka.)

145. *C. Infaustus.* Lec. Proc. Philad. 1856. 347.

La collection de M^r de Chaudoir renferme plusieurs exemplaires d'un *Curtonotus* rapportés de Kenai et qui me paraît appartenir à cette espèce.

Elle diffère de l'*Eschscholtzii* par son corselet un peu moins arrondi sur les côtés, plus large et moins déprimé aux angles antérieurs; les deux fossettes de la base sont un peu moins distinctes l'une de l'autre; les épaules sont un peu plus saillantes; les deux dents des tibias intermédiaires sont un peu plus rapprochées l'une de l'autre.

Elle diffère du *C. Torridus* par son corselet un peu moins large, moins arrondi sur les côtés, beaucoup moins fortement et surtout moins brusquement rétréci en arrière; par ses angles postérieurs plus droits, moins saillants; par sa ponctuation moins dense : par la moindre profondeur de l'impression transversale antérieure.

146. *C. Holmbergi.* Nov. Sp.

Long. 11 $^1/_2$ — Lat. 4 $^3/_3$ M.

Très-voisin du *C. Eschscholtzii;* un peu plus grand, plus large, avec le corselet plus élargi et plus arrondi en avant, plus rétréci vers la base, les angles postérieurs un peu plus saillants.

La dent supérieure des tibias intermédiaires est très-forte; l'inférieure est peu marquée.

Amérique Russe. Un ♂. coll. de Chaudoir.

147. *C. Striolatus.*

C. Rufimanus. Motsch. I. Sib. 176.

Long. 10 $^1/_2$ — Lat. 4 $^1/_3$ M.

Ne diffère du *C. Eschscholtzii* que par des angles postérieurs du corselet plus déprimés; par ses élytres brunes et très-finement striées-ponctuées : les points disparaissent dès le milieu. Les pattes sont de la couleur des élytres; les palpes et les antennes sont testacés.

La coll. de M^r de Chaudoir renferme un individu ♂ venant du Kamtschatka et étiqueté de la main de M^r Motschulsky : *L. Rufimanus* Esch. Ce nom ayant déjà été donné par Kirby (F. B. A. 33. 45.) à une autre espèce, j'ai dû en adopter un autre.

148. *C. Alpinus.* Fab.

Dej. III. 521. 61.

Long. 9 $^1/_2$ — Lat. 4 M.

Piceus, elytris plerumque brunneis; antennarum articulo primo femoribusque rufis. Prothorax antice latior, ante medium usque ad basim angustatus, lateribus parum rotundatus, angulis posticis rectis, extus prominulis. Elytra oblonga, subparallela, humeris subrotundatis.

Noir, avec le premier article des antennes et la base du deuxième, ainsi que les cuisses fauves; souvent les élytres sont également de cette couleur, sauf le premier intervalle et le bord externe.

Les fossettes entre les yeux sont profondes et souvent presqu'arrondies. Le corselet est peu convexe; les angles antérieurs sont un peu avancés et très-arrondis : les côtés ne sont arrondis que jusqu'au milieu; de là ils tombent presque droit sur la base où les angles, bien que droits, forment une très-petite saillie en dehors. La base est largement échancrée et fortement ponctuée dans les deux impressions, mais on remarque à peine quelques petits points au milieu; il n'y en a pas au bord antérieur.

Le rebord marginal du corselet est plus large que dans les *Torridus;* les élytres sont conformées comme dans cette espèce; ordinairement la strie préscutellaire est un peu plus courte. En dessous, le corps est plus fortement ponctué.

Lapponie.

149. *C. Caligatus.* Esch. (In coll. Chaud.)

Long. 9 $^1/_2$. — L. 4 M.

Niger, nitidus, antennarum articulo 1° femoribusque rufo-brunneis. Prothorax subtransversus, lateribus parum arcuatis, versus basim leviter angustatus, angulis posticis rectis reflexis nec extus prominulis. Elytra oblongo-ovata, post medium latiora, humeris subrotundatis.

D'un noir très-brillant avec un léger reflet métallique; le 1er article des antennes et la base du 2^e ainsi que les cuisses d'un fauve rougeâtre. Le corselet a une forme analogue à celle de l'*Alpinus,* mais il est plus étroit, coupé plus droit au bord antérieur et ses côtés sont beaucoup plus arrondis surtout entre le milieu et les angles postérieurs dont la pointe est plutôt défléchie que saillante; le sillon longitudinal est plus marqué. Les élytres vont en s'élargissant depuis l'épaule jusqu'au delà du milieu : l'épaule elle-même est plus arrondie que dans l'*Alpinus* et les stries sont un peu plus profondes. La dent supérieure des tibias intermédiaires est un peu plus épaisse que la 2^e qui est faiblement marquée.

Ile S^t-Georges. (Kamtschatka.) Coll. de Chaudoir. 1 individu ♂ provenant de la coll. Eschscholtz.

150. *C. Brunnipennis.* Dej. V. 800. 71.

L. Borealis. Chaud. Bull. Mosc. 1843. 775. (v. Berl. Ent. Z. V. 198.)

Long. 10. — Lat 4 $^1/_2$ m.

Niger, antennis basi rufis, elytris (marginibus exceptis) pedibusque brunneis. Prothorax convexus, versus basim angustatus, lateribus rotundatis, angulis anticis rotundatis, posticis vero obtusis subreflexis. Elytra elongato-ovata, humeris rotundatis.

Fort distincte de toutes les autres espèces, par son corselet très-convexe, plus étroit à la base qu'au bord antérieur; les

côtés sont fortement arrondis depuis ces angles jusqu'aux angles postérieurs sans aucune sinuation; la base est largement, mais peu profondément échancrée; les angles postérieurs sont obtus, c'est-à-dire plus ouverts qu'un angle droit; leur extrême pointe fait une faible saillie La base est couverte de gros points qui sont plus forts et plus serrés dans les deux fossettes dont l'intérieure surtout est profonde; on remarque quelques gros points épars au milieu du bord antérieur. Le rebord marginal est plus étroit que dans le *C. Alpinus;* il est de couleur brune. Les élytres sont conformées et colorées de même que dans cette dernière espèce, mais elles sont un peu plus longues : les épaules sont plus arrondies, les stries sont un peu plus fines, surtout extérieurement et vers l'extrémité. Les épisternes métathoraciques sont un peu creusés au centre. Les dents des tibias intermédiaires sont assez rapprochées : la dent supérieure est surtout bien développée.

Labrador.

151. *C. Cognatus.* Nov. Sp.

Long. 10. — Lat. 4 $^1/_2$ mill.

Dans la collection Dejean se trouvait sous le nom d'*Alpinus* un individu (mentionné dans le species III. 521) aussi grand que le *C. Brunnipennis,* ayant la coloration et la ponctuation de l'*Alpinus,* mais dont le corselet a presque la forme de celui du *Brunnipennis;* il est très-convexe, plus large; ses angles antérieurs sont aussi arrondis; les côtés sont plus rétrécis à la base et à l'extrémité, mais ils sont moins arrondis. La dent supérieure des tibias intermédiaires n'est pas dirigée en arrière; elle est beaucoup plus forte que l'inférieure qui est assez rapprochée de la première.

Norwége. (Coll. de Chaudoir.)

152. *C. Picipes.* Motsch. Ins. de Sibér., p. 176.

Long. 9 $^1/_2$. — Lat. 4 mill.

Piceus, palpis, antennis tarsisque rufo-testaceis; antennarum articulis 3-5 *basi piceis. Prothorax transversim subquadratus, antice leviter angustatus, ante angulos posticos prominentes acutos sinuatus. Elytra oblongo-ovata humeris subangulatis.*

Voisin du *C. Torridus* dont il diffère par les points suivants : Les yeux sont moins convexes ; le corselet est notablement plus large, surtout à ses deux extrémités ; le bord antérieur est moins échancré ; les angles antérieurs sont tout aussi arrondis, mais les côtés le sont moins : un peu après le milieu, ils se rétrécissent pour s'élargir de nouveau au-dessus des angles postérieurs qui sont grands et saillants, mais un peu moins réfléchis que chez le *Torridus :* le bord antérieur est plus ponctué. Les élytres sont un peu plus larges ; le rebord basal forme à l'épaule une légère saillie. En dessous, le corps est d'un noir plus brillant et plus fortement ponctué. La dent inférieure des tibias intermédiaires est presqu'aussi forte que l'autre.

Sibérie occidentale. (Omsk.)

La collection de M. de Chaudoir en renferme trois individus. J'en possède également un, venant de M. Motschulsky.

153. *C. Pedestris.* Nov. Sp.

Long. 10. — Lat. 4 $^1/_2$ mill.

Piceus, palpis, antennis, pedibusque elytrorum thoracisque margine inflexo rufis. Prothorax convexus, antice posticeque angustatus, angulis anticis deflexis, posticis subrectis; basi tota margineque antico in medio punctatis. Elytra oblongo-ovata , convexa, humeris rotundatis.

Noir de poix, avec les parties de la bouche, les antennes, le bord externe du corselet et des élytres ainsi que le dessous du corps et les pattes bruns. Les yeux sont médiocrement saillants ; les deux impressions situées entre eux sont arquées. Le bord antérieur du corselet est coupé droit, les angles sont déprimés et non proéminents ; les côtés, très-arrondis et ayant au milieu leur plus grande largeur, se redressent au-dessus des angles postérieurs qui sont presque droits ; le bord postérieur est légèrement échancré au milieu. La surface du corselet est assez convexe, déprimée vers la base qui, de même que le bord antérieur, est couverte de points très-distincts assez espacés ; les deux fossettes sont profondes et bien marquées ; les côtés ne sont pas déprimés, le bord marginal est étroit, peu relevé, et le sillon qui le longe est ponctué.

Les élytres sont ovales, très-convexes, un peu plus larges à la base que le milieu du corselet, sinuées sur les côtés, puis élargies au-delà du milieu. Le rebord basal est peu saillant, faiblement déprimé au milieu, et se redresse vers les épaules qui sont arrondies. Le rebord marginal est assez large, surtout au-delà du milieu. Les épisternes métathoraciques sont striés à leur partie interne et à la première moitié de leur partie externe : ils sont fortement ponctués de même que les côtés des segments abdominaux.

La collection de M. de Chaudoir renferme une ♀ étiquetée sous le nom de *C. Tibialis* Esch. Elle vient de Udskoe Ochotsk.

154. *C. Tristis.* Nov. Sp.

Long. 9. — Lat. 4 mill.

Brunneo-piceus, palpis testaceis; antennis pedibusque rufis. Oculi prominuli. Prothorax transversus, lateribus rotundatis, basi angustata, angulis posticis rectis, margine basali subsinuato, basi ipsa punctulata, foveolis 2 profundis notata, carinaque acuta ad angulos posticos. Elytra oblongo-ovata, subparallela, humeris obtusis, profunde punctato-striata. Corpus subtus punctulatum. Tibiæ intermediæ subtus obtuse bidentatæ.

Les yeux sont aussi saillants que dans le *C. Canadensis*, mais la carène interne est moins élevée ; le corselet est un peu plus court, beaucoup plus régulièrement arrondi sur les côtés dont le rebord est plus large et qui se rétrécissent plus fortement avant les angles postérieurs : ceux-ci sont plus saillants; le bord basal est un peu échancré dans le milieu : la base est plus déprimée de chaque côté, un peu moins ponctuée, les deux impressions sont moins distinctement linéaires et la carène externe est beaucoup plus tranchante. Le sillon longitudinal est plus profond, surtout au milieu. Les élytres sont plus étroites, plus parallèles, surtout en-dessous des épaules, celles-ci dépassant notablement les angles postérieurs du corselet. Les stries, leur ponctuation et le dessous du corps sont comme dans le *C. Canadensis*. Le prosternum porte au milieu un enfoncement triangulaire qui se prolonge en forme de sillon vers la pointe. Les tibias intermédiaires ont en dessous deux dents peu proéminentes et assez obtuses.

Canada boréal. (Owho-Bay.)

1 ♂ coll. de Chaudoir.

155. *C. Canadensis.* Nov. Sp.

Long. 11. — Lat. 4 ½ mill.

Piceus, elytris submetallicis : palpis testaceis, antennis pedibusque brunneis ; oculi prominuli. Prothorax transversus, utrinque angustatus lateribus leviter rotundatis, angulis posticis rectis ; margine basali bisinuato, basi ipsa punctulata, foveolisque duabus oblongis punctatis impressa. Elytra convexa, oblongo-ovata, humeris subrotundatis, striato-punctata ; episternis abdominisque lateribus punctatis.

Par son corselet rétréci en avant, cette espèce se rapproche du *C. Conoideus ;* elle est beaucoup plus petite, plus brillante, avec un reflet verdâtre sur les élytres. Les yeux sont beaucoup plus saillants, moins enchâssés en arrière ; le corselet est plus court, moins étroit en avant ; ses angles antérieurs sont moins déprimés, les côtés un peu plus rétrécis avant les angles postérieurs qui sont droits : le bord marginal est simplement bisinué et nullement réfléchi ; la base est ponctuée de même, mais l'impression interne est plus oblique et la carène près de l'impression externe est plus élevée ; l'impression transversale antérieure est également parsemée de très-petits points ; le rebord marginal est encore moins relevé et plus étroit : les élytres sont plus convexes, plus courtes, plus arrondies antérieurement et non dilatées postérieurement ; les épaules sont presqu'arrondies ; les stries sont aussi profondes que dans le *C. Fodinæ*, mais les points sont plus gros et les intervalles plus convexes. Tout le dessous du corps est parsemé de gros points entremêlés d'autres points plus petits.

Canada boréal.
La collection de M. de Chaudoir ne renferme qu'une ♀.

156. *C. Conoideus.* Nov. Sp.

Long. 12 ½. — Lat. 5 ¾ mill.

Piceus, palpis, antennis pedibusque brunneis. Oculi parum prominuli. Prothorax utrinque angustatus, lateribus leviter rotundatis ; margine basali utrinque reflexa, angulis posticis rectis ; basi subdepressa, punctulata, utrinque bifoveolata. Elytra oblonga, post medium dilatata, humeris prominulis, subdepressa, leviter punctato-striata, interstitiis planissimis. Episterna met. punctata.

Cet insecte, dont une femelle se trouve dans la coll. de M. de Chaudoir à la suite du *C. Fodinæ*, diffère essentiellement de cette espèce : comparé au *Fodinæ* du même sexe, il est plus grand, plus terne, la tête est plus petite, les yeux sont beaucoup moins proéminents, les antennes un peu moins épaisses; le corselet est notablement plus long, aussi rétréci en avant qu'en arrière : les angles antérieurs sont très-défléchis, un peu plus avancés; les côtés, plus finement rebordés, ne se rétrécissent pas brusquement avant la base, mais ils sont régulièrement arqués depuis le milieu jusqu'aux angles postérieurs; le bord basal, tronqué au milieu, est légèrement échancré au bas de chacune des fossettes internes et de là se prolonge très-distinctement en arrière, ce qui fait que les angles postérieurs sont réfléchis, mais nullement saillants comme dans le *C. Fodinæ;* toute la base est ponctuée; les points sont plus gros autour des deux impressions ; entre le bord antérieur et l'impression transversale, on distingue quelques petits points épars. Les élytres sont moins convexes, plus allongées; les côtés sont plus droits en dessous des épaules, mais ils s'élargissent très-distinctement dès le milieu; le rebord basal ne se relève pas aux épaules qui sont plus saillantes et forment avec le bord latéral un angle droit. Les stries sont beaucoup plus fines que dans toutes les autres espèces, sauf le *C. Substriatus*, et leurs points sont encore plus petits que chez ce dernier insecte; les intervalles sont tout-à-fait plans. Le dessous du corps est beaucoup plus distinctement ponctué que dans le *C. Fodinæ*. Les épisternes métathoraciques, parsemés de gros points, sont un peu plus larges en arrière.

157. *C. Hyperboreus*. Dej. V. 800. 77.

L. Longicollis. Motsch. coll. du Fl. Amur., p. 95, n° 63, pl. VI, f. 21.

Long- 11 $^1/_2$. — Lat. 5 mill.

Niger, palpis testaceis, elytris brunneis, antennis pedibusque dilutioribus. Prothorax brevis, antice posticeque æqualiter angustatus, in medio rotundatus, elytris posticis rectis prominulis. Elytra oblongo-ovata humeris rotundatis.

Cette espèce a beaucoup de rapports avec le *C. Dejeani :* elle en diffère par sa couleur plus foncée, presque noire ; sur la tête, on remarque un petit point enfoncé entre les deux fossettes ordinaires lesquelles sont conformées comme dans le *C. Dejeani*. Le corselet a une conformation analogue ; cependant il est plus court, un peu plus large, un peu moins rétréci en avant, les angles antérieurs sont plus arrondis ; les côtés sont plus distinctement sinués au-dessus des angles postérieurs qui sont plus droits et légèrement saillants ; la base est moins déprimée, un peu moins ponctuée et la fossette externe est moins profonde. Les élytres sont un peu plus larges, les épaules plus arrondies ; les stries sont moins profondes et moins ponctuées ; la strie préscutellaire est encore un peu plus courte.

Sous tous les autres rapports, cet insecte est semblable au *Dejeani* dont il n'est peut-être que la ♀.

Il est cependant nécessaire de remarquer que l'individu unique de la collection Dejean est étiqueté comme venant du Labrador, tandis que le *Dejeani* est originaire du Kamtschatka.

158. *C. Dejeani*. Nov. Sp.

Long. 11. — Lat. 4. $^1/_2$ mill.

Niger, elytris brunneis ; palpis, antennis pedibusque brunneo-testaceis. Prothorax antice angustior, ante medium dilatatus atque rotundatus, versus basim angustatus, angulis anticis maxime deflexis, posticis rectis. Elytra elongato-ovata, humeris subrotundatis.

La forme du corselet sépare nettement cet insecte de toutes les autres espèces, sauf du *C. Hyperboreus*. D. Il est, en dessus, d'un brun foncé ; les palpes, les antennes et les pattes sont d'une teinte

plus claire ; le dessous du corps est noir à l'exception des épimères métathoraciques qui sont bruns.

La tête est petite, très-finement ridée ; les deux fossettes entre les yeux sont assez petites et peu profondes ; les yeux sont peu saillants.

Le corselet est d'un tiers plus court que large, plus rétréci en avant qu'en arrière ; le bord antérieur est presque tronqué, les angles sont légèrement saillants, très-déprimés et peu arrondis ; les côtés sont arrondis dès avant le milieu où se trouve leur plus grande largeur, et de là ils se dirigent presque sans sinuosité sur la base où ils forment les angles postérieurs qui sont droits et non saillants. Le bord postérieur est bisinué en dessous des deux fossettes qui sont profondes et ponctuées ; le milieu de la base porte aussi quelques points. L'impression transversale antérieure est formée par une dépression assez éloignée du bord, peu profonde et lisse. Les côtés du corselet ne sont un peu déprimés qu'en dessous du milieu : le rebord marginal est mince et peu saillant.

Les élytres, en ovale allongé, sont un peu plus larges que le milieu du corselet. Le rebord basal est peu épais, déprimé au milieu ; les épaules sont bien marquées sans être saillantes. Les stries sont moins profondes et moins fortement ponctuées que dans le *C. Convexiusculus ;* les points sont à peine distincts après le milieu ; la petite strie préscutellaire est plus courte. Les épisternes métathoraciques sont un peu moins allongés que dans l'autre espèce, leur ponctuation est moins profonde et moins régulière ; les côtés des quatre premiers segments abdominaux sont médiocrement ponctués. Les deux dents des tibias intermédiaires sont bien marquées.

La collection Dejean ne renferme qu'un seul exemplaire mâle indiqué comme originaire du Kamtschatka et confondu avec le *C. Melanogastricus.*

159. *C. Cribratus.* Chaud.

Long. $8\,^3/_4$ — Lat. $3\,^3/_4$ mill.

D'un brun très-brillant : les deux premiers articles des antennes et les pattes sont plus clairs. La tête, assez large et convexe, est couverte de gros points assez inégalement répartis ; les deux fossettes qui, dans ce genre, existent ordinairement entre les yeux, ne sont nullement distinctes.

Le corselet est convexe, brièvement cordiforme, très-élargi en avant; le bord antérieur est tronqué, les angles sont arrondis et nullement saillants; les côtés sont fortement arrondis jusqu'au premier tiers où ils ont leur plus grande largeur; ils se dirigent ensuite obliquement sur la base où ils forment un angle un peu plus ouvert que l'angle droit; la base est fortement déprimée de chaque côté un peu avant les angles postérieurs qui ainsi sont relevés; cette dépression forme une fossette unique, ponctuée, assez large, mais qui n'est pas bornée extérieurement par la carène que l'on voit dans les autres espèces; les impressions transversales antérieure et postérieure sont très-marquées, fortement ponctuées; toute la surface du corselet porte des points épars; le rebord marginal est assez large. Les élytres sont en ovale légèrement oblong, plus larges que le corselet : le rebord basal remonte jusqu'à l'angle huméral qui est très-relevé et saillant; les stries, peu profondes, s'affaiblissent sur les côtés et vers l'extrémité; la strie préscutellaire, située dans le premier intervalle, est courte et très-profonde. En dessous, l'insecte est parsemé de points assez gros. La pointe sternale, au lieu d'être simplement arrondie et convexe, est brusquement déprimée et aplatie à son extrémité. Les épisternes métathoraciques sont très-courts et assez larges; ils ne portent que peu de points.

M. de Chaudoir possède un individu unique, ♂, provenant de la coll. Gebler. (Sibérie centrale.)

160. *C. Hæmatopus*. Dej. spec. V. 769. n° 213. (Feronia.)

Labrador.

Les tibias intermédiaires du ♂ sont simplement bisinués en dessous. Les épisternes ne sont que faiblement ponctués. Les antennes sont plus épaisses que dans les autres espèces.

BRADYTUS. Zimm.

Ce genre, établi par Stephens, a été adopté par Zimmermann, qui lui a assigné pour caractères :

1° Corselet plus étroit en arrière qu'en avant :

2° La dent du menton bifide :

3° Les tibias postérieurs des ♂ garnis d'une pubescence serrée.

Or, Stephens s'était surtout attaché à ce que, selon lui, la dent du menton était simple, et ce caractère a été reproduit par quelques entomologistes (1). L'erreur était évidente, aucun des insectes rangés par Stephens parmi les *Bradytus* n'ayant une dent simple.

Il faut cependant reconnaître que si, dans quelques espèces, la dent est profondément bifide, elle l'est beaucoup moins dans d'autres et particulièrement dans l'une de nos espèces européennes : *B. Consularis*, et surtout dans le *Parvicollis* qui peut être considéré comme une *Amathitis* à jambes postérieures pubescentes.

D'un autre côté, le caractère le plus important, la pubescence épaisse des tibias postérieurs dans le ♂, est sujet à certaines modifications : très-prononcé dans les *B. Consularis*, *Lævistriatus*, *Fulvus*, *Apricarius*, *Parvicollis*, il l'est déjà moins dans les *B. Aurichalceus*, *Brevipennis*, *Parallelus*, *Minutus*, *Abdominalis*, et disparaît presque complètement chez le *B. Majusculus*.

La strie préscutellaire est ordinairement longue; elle prend naissance à la base de la deuxième strie et se dirige obliquement vers la première à laquelle elle se réunit souvent. Cependant, chez les *B. Abdominalis* et *Parvicollis* elle est située entre la première strie et la suture qu'elle longe ; elle s'arrête brusquement sans se diriger vers la première; cette disposition est la même que dans le *G. Amathitis* avec lequel ces deux insectes ont beaucoup de rapports ; chez le *B. Exaratus*, la strie préscutellaire se compose d'un trait court, partant de la deuxième strie et isolé à son extrémité.

Le prosternum des ♂ porte ordinairement dans son milieu une fossette oblongue et ponctuée; mais chez les *B. Exaratus* et *Aurichalceus* il n'y a qu'un espace ponctué sans enfoncement, et chez le *B. Minutus*, on distingue à peine quelques petits points épars.

161. *B. Consularis.* Duft. — Dej. Spec. III, 501. 44. — Schaum. D. J. I. 507. 3.

Niger. Chaud. B. M. 1837, n° VII, 35.

Europe. Perse.

(1) Kirby F. B. A. 34, 35 et 36. (47.)
Brullé, Hist. nat. des Ins. IV. 590.

162. *B. Lævistriatus.* Chaud. (coll.)

Long. 10 ½. — Lat. 5 mill.

Niger, nitidus, palpis, antennis pedibusque rufis. Pronotum transversum, antice posticeque angustatum, lateribus rotundatis, angulis posticis subrectis leviter prominulis, basi foveolis 2 profundis punctatisque impressum. Elytra oblongo-ovata, postice angustata satque profunde sinuata; humeris elevatis prominulis; striato-punctata, punctis extus apiceque fere evanescentibus.

D'un noir brillant; les antennes, les pattes et les épipleures d'un roux ferrugineux; les palpes un peu plus clairs. La tête est plus large et moins convexe que celle du *B. Consularis;* les deux fossettes en avant du vertex sont plus profondes et plus arrondies. Le corselet est d'une toute autre forme; il est large, arrondi sur les côtés, mais cependant un peu moins arqué après le milieu; rétréci à ses deux extrémités, mais un peu plus à la base qu'en avant; le bord antérieur est échancré et les angles antérieurs, saillants, sont très-arrondis; les angles postérieurs sont un peu plus ouverts que l'angle droit, un peu saillants extérieurement. Le bord basal est tronqué. La base n'est nullement déprimée au milieu, mais elle l'est fortement de chaque côté où elle est marquée de deux fossettes larges et plus profondes que dans le *B. Consularis;* la carène située entre le bord marginal et la fossette externe est plus épaisse et moins oblique que dans cette de nière espèce; ces deux fossettes sont ponctuées, mais plus faiblement que dans le *Consularis;* le milieu ne porte que quelques points peu distincts. Le sillon longitudinal est large et profond au milieu, très-étroit à la base, mais il ne dépasse pas la dépression transversale antérieure qui est bien marquée sans atteindre le bord.

Les élytres sont ovales-oblongues, rétrécies vers l'extrémité où elles sont assez profondément sinuées, plus arrondies sur les côtés que dans la *Consularis*, un peu moins convexes; le rebord basal se relève à partir du cinquième intervalle, tandis que, dans cette dernière espèce, il ne se redresse qu'au huitième.

Les stries sont moins larges et moins profondes surtout extérieurement et à l'extrémité; les points, plus petits que dans le *B. Exaratus*, disparaissent presque complètement extérieurement et vers

l'extrémité. La strie préscutellaire, s'étendant obliquement de la base de la deuxième strie jusqu'au quart de la strie suturale, est plus longue que dans le *B. Consularis* et surtout que dans l'*Exaratus* ou elle est presque rudimentaire. Les intervalles sont plans. Le prosternum du ♂ porte dans son milieu une fossette oblongue et ponctuée. Les épisternes métathoraciques sont allongés et lisses. Ils sont ponctués dans les *B. Consularis* et *Exaratus* et d'ailleurs notablement plus courts dans cette dernière espèce. Les tibias postérieurs du ♂ portent une pubescence serrée qui s'élève jusqu'au milieu.

Il n'est pas impossible que cet insecte soit le *Br. Furtivus* Say (Lec. Proc. Chil. 1856. 349) mais, d'après la description, ce dernier aurait des élytres de même forme que l'*Exaratus*, tandis que le *Lævistriatus* les a beaucoup plus longues ; le corselet serait *à peine* rétréci postérieurement, etc.

Etats-Unis. ♂ et ♀. Coll. de Chaudoir.

163. *B. Fulvus.* De Geer. — Dej. Spec. III. 511. 53. — Schaum. D. J. I. 505. 1.

Europe. Sibérie.

164. *B. Aurichalceus.* — Dej. Spec. III. 513. 54.

Sibérie.

165. *B. Brevipennis.* Chaud. B. M. 1844. 446.

Daourie. Altaï.

166. *B. Apricarius.* Payk. — Dej. Spec. III. 506. 48. — Schaum. D. J. I. 506. 2.

Parallelus. Chaud. B. M. 1842. 827 et Car. Cauc. p. 162. (Lenkoran.)

Var. major. Chaud. Car. Cauc. 164. (Caucase.)

167. *B. Minutus.* Motsch. Ins. Sib. p. 179.

Sibérie orientale.

168. *B. Exaratus.* Dej. Spec. III. 509. 51.

Amér. du Nord.
La dent du menton ne paraît nullement bifide ni échancrée.

169. *B. Parvicollis.* Gebl. B. M. 1833. 269.

Kirghises.

Cette espèce et la suivante ont, dans leur forme et leur coloration beaucoup d'analogie avec les *Amathitis;* la disposition de la strie préscutellaire et la non ponctuation des épisternes métathoraciques augmentent cette ressemblance. Mais, ordinairement, la dent du menton, bien que large, est cependant distinctement bifide à l'extrémité.

170. *B. Abdominalis.* Motsch. Ins. Sib. p. 181.
Kirghises.

171. *B. Majusculus.* Chaud. B. M. 1850. 148.
Sibérie orientale.

172. *B. Simplicidens* Moraw.

Picco-brunneus, ore, antennis, pedibus elytrorumque margine testaceis. Menti dens integer. Vertex in medio foveolatus. Prothorax transversus, parum convexus, lateribus explanatis, angulis posticis minutis prominulis acutis, undique (medio excepto) crebre punctulatus; sulco transversali antico integro. Elytra ovata, subplana, striis vix, interstitiis vero crebre punctulatis.

Long. 10 $^1/_2$. — El. 6. — Lat. 4 $^1/_2$ mill.

Je place à la suite des *Bradytus* un insecte que M. Dohrn m'a communiqué sous le nom ci-dessus et comme venant du Japon. L'unique individu que j'ai vu étant une ♀, il m'est impossible d'affirmer que ce soit réellement un *Bradytus*. Comme c'est du *B. Consularis* qu'il se rapproche le plus, c'est à cette espèce que je vais le comparer.

La tête, le corselet et les élytres sont d'un brun de poix; le bord externe de celle-ci et la plus grande partie de la suture sont testacés;

les parties de la bouche, les pattes, les antennes et la première moitié des mandibules sont également testacées. La dent du menton est large, triangulaire; son extrémité est obtuse et nullement divisée; la languette porte au centre un sillon longitudinal. Le pénultième article des palpes maxillaires est un peu plus court que le dernier. Les mandibules, fortes, larges, unidentées à la base, ont leur extrémité courbée et aiguë; leur moitié supérieure est fortement striée. Le labre, rétréci en avant, est plus distinctement échancré. L'épistôme est coupé en arc de cercle, ne formant pas un angle au milieu. Les yeux sont un peu moins saillants; les deux impressions longitudinales sur le devant du front, sont plus longues et divergent en arrière; elles portent quelques points de même qu'une impression arrondie que l'on remarque sur le vertex. — Le corselet est beaucoup moins convexe, plus large, à peine plus étroit en avant qu'en arrière; ses côtés sont un peu plus arrondis; les angles antérieurs sont moins saillants; les angles postérieurs forment une petite saillie un peu plus aiguë; la marge est plus large et plus plane; le sillon longitudinal est plus profond; le sillon transversal antérieur, qui disparaît au milieu chez le *B. Consularis*, est ici bien distinct dans toute son étendue; les deux fossettes oblongues de la base sont moins profondes; toute la base est beaucoup plus fortement ponctuée, de même que les côtés et la partie antérieure. Les élytres sont plus planes, plus larges, surtout en arrière; l'épine humérale est plus petite; les stries sont moins profondes et moins ponctuées; leurs intervalles sont couverts de points nombreux qui sont cependant moins distincts au milieu des élytres. Le dessous de l'insecte est entièrement ponctué. Les pattes sont plus longues et plus grêles; les tibias postérieurs sont plus arqués.

Japon. 1 ind. ♀. (Coll. Dohrn.)

PERCOSIA. Zim.

Ce genre forme la limite extrême entre les *Amara* et les *Zabrus*. Zimmermann ne le distinguait des *Celia* que par la dilatation plus forte des tarses antérieurs dans les ♂ : M. de Chaudoir (Stett. E. Z. 1859. 130.) a signalé un caractère beaucoup plus net, qui n'appartient à aucun autre Amaroïde et qui paraît être propre aux

Zabrus: c'est la présence de trois ou quatre points pilifères de chaque côté de l'extrémité de la pointe sternale. Si nous ajoutons à cela que dans une des espèces du genre la dent du menton est presque tronquée à son extrémité et moins bifide que chez certains *Zabrus* de Grèce, nous serons bien près de reconnaître que les *Percosia* peuvent être considérés comme des *Zabrus* chez lesquels la deuxième épine terminale des tibias antérieurs est plus ou moins oblitérée.

Je ne place donc les *Percosia* à la suite des *Amara* qu'à titre de transition vers les *Zabrus*.

Le nombre des espèces connues est peu élevé. Indépendamment de celles qui font partie de la collection de M. de Chaudoir, on en a encore décrit trois :

1° *Timida*. Motsch. Ins. Sib. p. 192.

2° *Laticollis*. Motsch. Rüssl. Kaef. p. 58, note 1.

3° *Diffinis*. Lec. Geod. coll. p. 87.

Les espèces que j'ai pu examiner peuvent se répartir de la manière suivante :

I. Episternes métathoraciques aussi longs qu'ils sont larges à leur base.

a. Très-fortement ponctués.

172. *Obesa*. Say Trans. Phil. S. (Feronia.)

Dejean confondait avec l'*A. Patricia* cette espèce dont M. de Chaudoir a signalé le caractère distinctif. (Stett. E. Z. 1859. 131.)

b. Faiblement ponctués.

173. *Patricia*. Duft. — Dej. III. 502. 45. — Schaum. D. J. I. 549. 46. (excl. syn. ult.) Var. *Zabroïdes*. Dej. III. 504. 46.

II. Episternes m. plus courts qu'ils ne sont larges à leur base.

a. Corps ovale.

174. *Sicula*. Dej. Sp, V. 797. 73.

b. Corps en ovale court.

175. *Reichei*. Coq. Ann. Soc. Ent. 1858. 775.

M. Coquerel indique deux caractères qui séparent cette espèce de la précédente.

1° Base du corselet simplement ridée, non ponctuée. J'ai sous

les yeux des individus tout aussi fortement ponctués que l'*A. Sicula* et même plus ponctués que le type de cette dernière.

2° La première strie très-enfoncée en arrière de l'écusson. — Ce caractère est plus ou moins prononcé dans les divers individus des deux espèces.

Je ne vois d'autre différence entre les *P. Sicula* et *Reichei* qu'une taille plus courte chez ce te dernière.

III. Epist. m. plus longs qu'ils ne sont larges à leur base.

a. Finement rugueux.

176. *Pastica.* Dej. V. 796. 72.

b. Ponctués.

177. *Infuscata.* Nov. Spec.

Long. 10 $^1/_2$. — Lat. 5 $^1/_4$ mill.

D'un noir assez terne, au moins chez la ♀, seul sexe que je connaisse.

Dent du menton large, courte, distinctement bifide, tandis que chez la *Pastica* elle est assez longue, creusée au centre et presque tronquée à l'extrémité. Les deux impressions du front, entre les yeux, sont moins longues et moins profondes; le vertex est plus convexe. Le corselet, notablement moins convexe, est un peu plus court, plus large, plus arrondi vers la base où les angles sont moins droits; plus rétréci et surtout moins déprimé aux angles antérieurs; les deux impressions de la base sont également profondes, tandis que, dans la *Pastica*, l'impression interne est moins distincte que l'autre; on ne remarque pas de points en dehors des impressions. Les élytres sont un peu plus allongées; la ligne de points sur la huitième strie est un peu plus distinctement interrompue au milieu. Les épisternes métathoraciques qui, dans la *Pastica*, sont légèrement rugueux, portent ici des points bien distincts.

M. de Chaudoir possède trois individus ♂ : l'un de Sibérie (coll. Gebler); le second de Songarie avec une étiquette de M. Motschulski portant : *Percosia Songarica*, le troisième étiqueté : *P. Timida* Motsch. La description qui est donnée de ce dernier insecte (Ins. de Sibér. p. 192) prouve qu'il s'agit d'une espèce bien différente.

Le seul caractère constant qui sépare les *Zabroïdes* des *Amaroïdes*, est l'existence, chez les premiers, de trois épines à l'extrémité interne des tibias antérieurs.

La présence de deux ou trois points pilifères de chaque côté de la pointe sternale, est encore un caractère ordinaire des *Zabroïdes*, mais cependant, il fait défaut chez les *Acorius* et il se rencontre chez les *Percosia*.

D'un autre côté, la pubescence interne des tibias postérieurs, la fossette ovale et ponctuée du milieu du prosternum des ♀ sont deux caractères de certains genres d'*Amaroïdes*, et cependant je les rencontre dans une nouvelle espèce de *Zabroïdes* que M. Julius Lederer a reçu de Larnaka (partie méridionale de l'Ile de Chypre) et qui doit devenir le type d'un nouveau genre.

ZABROSCELIS. N. gen.

Dent du menton large à la base, aiguë et non divisée à l'extrémité. Le dernier article des palpes maxillaires est de moitié plus long que le précédent. Les mandibules sont obtuses à l'extrémité, striées intérieurement, mais moins fortement chez le ♂ que chez la ♀.

Les antennes sont assez minces ; elles atteignent la base du corselet; le 3e article est du double plus long que le 2e et un peu plus long que le 3e, surtout chez le ♂.

Le labre est arrondi sur les côtés, légèrement échancré au milieu. La tête porte près des yeux le gros point qui caractérise les *Amara ;* elle est renflée en arrière; les yeux sont un peu moins saillants que chez les *Polysitus*. Le corselet est brièvement cordiforme, très-rétréci vers la base et ses angles postérieurs sont aigus. Les élytres sont en ovale assez court, assez convexes ; la strie prescutellaire est longue et oblique ; les épaules sont relevées et un peu anguleuses.

Les épisternes métathoraciques sont un peu plus longs que leur largeur à la base ; le segment anal porte à l'extrémité un point chez le ♂, deux chez la ♀. La pointe sternale est rebordée et ne porte pas de points pilifères ; le sternum du ♂ porte au milieu une fossette ovale fortement ponctuée.

Les tibias antérieurs ont à leur extrémité interne trois épines

dont celle du milieu, un peu courbe à l'extrémité, est beaucoup plus longue que les autres ; le côté externe est muni d'épines courtes et nombreuses. Les tibias intermédiaires, un peu courbés en dedans, sont obscurément dentés en scie et épineux extérieurement comme chez les *Acorius*. Les tibias postérieurs du ♂ sont munis intérieurement d'une pubescence serrée.

Z. Ditomoïdes.

Long. 8. 9. — Lat. 3 $^{1}/_{4}$. 4 mill.

Ænescenti-picea, ore ; antennis, pedibus elytrorumque margine testaceis. Oculi parum prominuli ; vertex obsolete rugoso-punctatus. Prothorax convexus breviter cordatus, ante basim maxime constrictus, angulis posticis acutiusculis ; basi, antice et in medio punctulatus. Elytra oblongo-ovata, parum convexa, tenuiter punctato-striata.

Couleur de poix avec un reflet d'un vert bronzé chez le ♂. Le menton, les palpes, les antennes, la base des mandibules, les côtés du labre, le bord externe des élytres, l'extrémité de l'abdomen et les pattes sont testacés ; les jambes sont un peu plus rougeâtres que les cuisses.

Cet insecte ayant les plus grands rapports de forme avec l'*Amathitis Rufescens*, c'est avec cette dernière que je vais le comparer. La dent du menton est plus longue et plus aiguë ; la languette est un peu plus large. La tête est un peu plus renflée dans les deux sexes, mais les yeux sont moins convexes ; le vertex est parsemé de rides entremêlées de points très-petits ; le corselet est plus étroit, beaucoup plus convexe, très-cordiforme ; ses côtés sont fortement arrondis et vont en se rétrécissant jusqu'au-dessus des angles postérieurs qui sont très-petits et forment une légère saillie en dehors ; leur pointe est plus aiguë que dans l'*A. Rufescens* ; les côtés, très-déprimés, sont plus finement rebordés ; l'impression interne de la base est plus profonde, plus longue et plus rapprochée du bord externe ; l'impression externe est à peine distincte ; toute la base est fortement ponctuée de même que la partie antérieure et centrale. — Les élytres ont la même forme, mais elles sont un peu moins

larges, plus convexes, plus finement striées et ponctuées; les épaules sont plus arrondies; la strie préscutellaire est un peu plus longue; les pattes sont plus courtes et plus épaisses. La fossette sternale est plus petite et plus profondément ponctuée; les épisternes métathoraciques sont plus étroits et non ponctués.

M. Julius Lederer en a reçu plusieurs individus des deux sexes de Larnaka (Chypre.) M. Baudi di Selve m'en a également communiqué un individu venant de la même île.

CATALOGUE DES **AMARA** DÉCRITES.

Abdominalis Mky. J. Sib. 181.	(Brad.)	Kirghises.	170
Abbreviata Chaud.	(Cel.)	Astrabad.	67
Aberrans Baudi. Berl. E. Z. 1864.			
Acuminata Payk.	(Am.)		35
Acutangula P.	(Cel.)	Am. bor.	70
Adamantina Kol.	(Am.)	Caucas.	15
Adstricta P.	(Curt.)	Am. bor.	127
Aegyptia Zim.	(Amath.)	Egypt.	104
Aenea Meg. (communis var. cf. Heer F. H. 95.)			
Aenescens P.	(Leiocn.)	Egypt.	78
Aeruginosa Kol. (curta D. cf. Sch. D. I. 25.)			
Affinis D.	(Leiocn.)	Esp.	89
— Motsch. Ins. Sib. 183.		Caucase.	
Agilis Ryl. (Newm. Ent. 1841, 216.)			
Alpestris Vill.	(Leirid.)		110
Alpicola D.	(id.)	Styrie.	118
— Heer. F. H. 95. (Communis Pnz. var.)			
Alpina Fab.	(Curt.)	Eur. bor.	148
Altaïca Mky.	(Curt.)	Altaï.	126
Ambulans.	(Cel.)		48
Amica Duf. (Harp. anxius cf. Stett. E. Z. 1850. 181.)			
Amplicollis Manh.	(Cel.)	Am. Russe.	76
Analis Fab. (Apricaria Pk. cf. D. J. I.)			
Angustata Say.	(Am.)	Am. bor.	10
Angusticollis Motsch.	(Amath.)	Sib. or.	108
Antennata Rsh. (Quenselii sch. cf. D. J. 40.)			
Anthobia Vill.	(Am.)	Lomb.	37
Anthracina Hald. (Impuncticollis Say. cf. Lec. Proc. Am. 6. Phil. 1856. 351.			
Apricaria Payk.	(Brad.)		166
Arcuata P.	(Leiocn.)	Esp.	85

Arenaria P.	(Leiocn.)	Esp.	95
Armeniaca Motsch.	(Curt.)	Armén.	141
Assimilis Chaud. (Vulgaris var.)	(Am.)		
Atra Steph. (Trivialis var. cf. Stett. E. Z. 1848. 39.)			
Atrocoerulea St. (Communis Pz. cf. D. J. 24.)			
Aulica Ill.	(Curt.)		128
Aurata D.		Calif.	65
Aurichalcea Gebl.	(Brad.)	Sib.	164
Avida Say.	(Leiocn.)	Am. bor.	98
Barnevillii Frm. (Sabulosa D.)	(id.)		96
Basillaris Say.	(Am.)	Am. bor.	40
Biarticulata Motsch.	(Cel.	Sib.	51
Bicolor Pk. (Aulica Pz. cf. D. J. 7.)			
Bifrons Gyll.	(Cel.)		66
Bipartita Motsch. R. K. 60 et Amur Kaef. 95. (Interstitialis D.)		Sib. centr.	
Bistriata P.	(Curt.)	Lenkoran.	130
Borealis Motsch. I. S. 184.	(Cel.) interstitialis D.	Sib.	
— Chaud.	(Curt.)		150
Brevicollis Chaud.	(Curt.)	Sib.	120
Brevicornis St. (cf. Schaum. D. I. 1. 505.)			
— Mén.	(Curt.)		
Brevilabris Kirb. F.B.A. 35-46	(Curt.)	Am. bor.	
Brevipennis Chaud.	(Brad.)	Altaï.	165
Brevis D.	(Leiocn.)	Esp.	82
Brunnea Gyll.	(Acr.)	Eur. bor.	76
— St. (Bifrons. Gyll. cf. D. I. 43.)			
Brunnicornis Heer. (Curta D.) cf. D. J. 25.			
Brunnipennis D.	(Curt.)		150
Brunnipes Motsch. col. Calif. 55.		Calif.	
Calathoïdes P.	(Leirid.)	Caucas.	116
Californica D.	(Cel.)	Calif.	55
— Motsch. R. K. 62. — Col. Calif. 34.	(Curt.)	Am. Russe.	
Caligatus P.	(Curt.)	Kamtsch.	149
Canadensis P.	(Curt.)	Canada.	155
Cardui D.	(Leirid.)	Piém.	113

Carinata Lec. Proc. Phil. 1856. 347.	(Curt.)	Nebraska.	
Castanea P.	(Curt.)	Kirghis.	135
Caucasica Motsch.	(Curt.)	Caucas.	128
Chalcea D.	(Cel.)	Am. bor.	71
Chalcites Zim.	(Am.)	Jap. Chine.	12
Chaudoirii Hh.	(Am.)	Kiew.	3
Coerulea Motsch. col. calif. 33.	(Cel.)	Calif.	
Cognata P.	(Curt.)	Norw.	151
Communis Fab. (Montivaga St)	(Am.) cf. D. J. 22.		17
— Panz.	(Am.)		26
Complanata D.	(Cel.)	Dalmat.	44
Composita Walk.	(Curt. ?)	Ceylan.	
Concinna Zim. (Lepida var.)			5
Concolor Ol. (Fulva D. G. cf. Sch. 1. D. J. n°.)			
Confinis D. (Avida S.)	(Leiocn.)	Am. bor.	98
Conflata Lec. Proc. Phil. 1856. 352.		Calif.	
Confusa Lec.		Am. bor.	22
Congrua Mor.	(Am.)	Japon.	12
Conoïdea P.	(Curt.)		156
Consularis Duft.	(Brad.)		161
Contempta Lec.	(Cel.)	Am. bor.	73
Contractula St. (nobilis) cf. D. J. 5.	(Leirid.)		
Contracta P.	(Curt.)	Sib.	132
Contrusa Schdt. (Famelica Z. cf. D. J. 27.)			
Convexa Lec.	(Am.)		23
Convexicollis P.	(Curt.)		119
Convexilabris Schdt. (Apricaria cf. D. J. 2.)			
Convexior Steph. (Communis. Pz. cf. E. Z. 1848. 39.)			
Convexiuscula Marsh.	(Curt.)		136
— Kirb. F. B. A. 55. 44.		Am. bor.	
Cordata P. (Cordicollis Chaud.)	(Amath.)		109
Cordicollis Mèn. Zim.	(Leiocn.)		101
— Chaud. (Cordata P.)	(Amath.)		109
Corpulenta P.	(Leiocn.)	Espagne.	83
Corsica Reich.	(Leiocn.)		100
Cottyi Coq.	(Leiocn.)	Alg.	77

Crassa Steph. (Consularis Duft. cf. E. Z. 1848. 39.)
Crassispina Lec. Proc. Phil. 1856. 351. L. sup.
Crenata D. (Leiocn.) 97
Crenatostriata Chaud. (Crenata D.) (id.) Caucas. 97
Cribrata P. (Curt.) Sib. 139
Cribricollis Chaud. (Curt.) Crim. 139
Croatica Er. (Spectabilis Sch. D. J. 6.)
Cuniculina D. (Leirid.) Styrie 117
Cupreolata P. (Am.) Am. bor. 21
Cursitans Zim. (Cel.) 46
Cursor. St. (Familiaris. cf. D. J. 31.)
Curta D. (Am.) 29
— Steph. (Spreta D. cf. E. Z. 1848. 39.)

Dalii Ryl. Newm. Ent. 1841. 216.. Anglet.
Dalmatina D. (Leiocn.) Dalmat. 80
Daurica Motsch. (Curt.) Daourie. 142
Dejeani P. (Curt.) 158
Depressa Zim. cf. D. J. 523 et 536. (Am.)
— Lec. Proc. Phil. 1856. 350. Am. bor.
Deserta Krin. (Curt.) Sarepta. 138
Despecta Shlb. (Harp.) Curta D. cf. D. J. 25.
Difficilis Lec. Proc. Phil. 1856. 351. Am. bor.
Diffinis Lec. Proc. Phil. 1856. 354. (Perc.) ib.
Dilatata Heer. (Patricia Duft. cf. D. J. 46.)
— Motsch. J. S. 189. (Cel.) Sibér.
Discors. Kirb. F. B. A. 40. 56. Am. bor.
Discrepans. Marsh. (bifrons Gyll. cf. E. Z. 1848. 39.
Distincta Ramb. F. Andal. 109. 5. (Leiocn.) Andal.
Distinguenda. Mor. B. F. P. 1862. 49. (Brad.) Sib. or.
Diversa P. (Leiocn.) Dalmat. 94
Domidua St. (Saphyrea D.)
Dubia Motsch. J. S. 187. (Am.) Oural.

Elegans Ryl. Newm. Ent. 1841. p. 216.

Elongata Lec. Proc. Phil. 1856. 348.		L. sup.	
Equestris Duft. (patricia Duft.) (Perc.)			
Erratica St.	(Cel.)		52
Erythrocnema Zim.	(Am.)	Eur. m.	4
Erythropa Steph. (gemina cf. E. Z. 1848. 39.) — Kirb.			
Eschscholtzii Chaud.	(Curt.)	Am. Russ.	144
— Manh. cf. Lec. Proc. Phil. 1860. 316.			
Euphratica P.	(Leiocn.)		79
Eurynota D. (acuminata Payk.	(Am.)		35
Exarata D.	(Brad)	Am. bor.	168
Eximia D.	(Leiocn.)		81
Fallax Lec.	(Am.)	Am. bor.	19
Famelica Zim.	(Am.)		33
Familiaris Duft	(Am.)		36
Farcta Lec. Proc. Phil. 1856. 353.		N. Mex.	
Ferrea St. (communis Pz. cf. D. J. 24.)			
Ferruginea Payk. (fulva D. G.)	(Brad.)		
Fervida Coq.	(Leiocn.)	Algér.	90
Floralis Gaub. (Erythrocn. Z.)	(Am.)		4
Fodinæ Mnh.	(Curt.)	Sib.	126
Formosa Schdt. (Nitida St. cf. D. J. 22.)			
Fulva D. G.	(Brad.)		163
Fulvipes P.	(Curt.)		123
Furtiva Say. Lec. Proc. Phil. 1856. 349.	(Brad.)	Nebraska.	
Fusca D.	(Cel.)		45
Fuscicornis Zim. (Cursitans Z.)	(Cel.)		46
Gebleri D.	(Curt.)	Sib.	129
Gemina Zim. (lucida Dft.)	(Am.)		38
Gibba Lec. Proc. Ph. 1856. 355.	(Cel.)	L. sup.	
Gigantea Motsch. J. S. 173.	(Curt.)	Sibér.	
Glabrata D.	(Leiocn.)	Esp. Alg. etc.	99
Glacialis Manh.	(Curt.)	M. Glac.	121
Graculus Heer. (erratica Dft)	(Cel.)) cf. D. J. 30.		
Granaria D. (infima D.)	(Cel.)		75

Grandicollis Zim. (rufocincta Shlb.)	(Cel.)		68
Gravidula Rosenh.	(Leiocn.)	Andal.	84
Haematopus D.	(Curt.)	Labrador.	160
Harpalina Lec. Proc. Phil. 1856. 355.		N. Mex.	
Harpaloïdes D.	(Curt.)	Sib.	125
Helopioïdes Heer.	(Leirid.)	Tyrol.	110
Holmbergi P.	(Curt.)	Am. R.	146
Hyperborea D.	(Curt.)	Labrador	157
— Lec. A. L. 357 et Proc. Phil. 1856. 349. 15.	(Brad.)	Am. bor.	
Impresa Motsch. J. S. 188.		Sib.	
Impressicollis Motsch. col. Calif.. 32.		Calif.	
Impunctata Say. (Voy. Lec. Proc. Ph. 1856 356. (*Pristod.*)			
— Rch. (Erythrocnema Z.) cf. Wien. Ent. Mon. 1858. 273.			
Impuncticollis Say.	(Am.)		18
Inaequalis Kirb.	(Cel.)		50
Incisa Grimm. Steierm. col. 31.		Styrie.	
Indica. P.	(Leiocn.)		92
Indistincta Hald.	(Am.)		10
— Manh.	(Cel.)		62
Inepta Lec. Proc. Phil. 1856. 351.		Oregon.	
Infausta Lec.	(Curt.)	Am. R.	145
Infima Kn.	(Cel.)		75
— Steph. (Gemina cf. E. Z. 1848. 39.)			
Infuscata P.	(Perc.)	Sib.	178
Ingenua Dft.	(Cel.)		42
— Steph. (Obsoleta cf. E. Z. 1848. 39.)			
Insignis D.	(Am.)		42
Intermedia Chaud.	(Am.)	Caucas.	31
— Motsch.	(Curt.)	Kirghis.	137
Interstitialis Esch.	(Cel.)	Amb.	49
— Fairm.		Sicile.	
Iridipennis Heer. (Fulva D. G. cf. D. J. I.)			
Jacobina Lec. Proc. Phil. 1856. 346.		Calif.	

Lacustris Lec. Proc. Phil. 1856. 346.
et 1860 316. (Curt.) L. sup.
Lævigata Motsch. J. S. 190-350. (Cel.) Kirghis. 68
Lævipennis Kirb. F. B. A. 40. 55, cf. Lec. Proc.
Phil. 1856. 353. L. sup.
Lævis Steph. (Familiaris, cf. E. Z. 1848. 39.
Lævistriata P. (Brad.) Am. bor. 162
Lapidaria Kolen. M. Ent. p. 54. Caucas.
Lapidicola Heer. (Plebeja cf. D. J. 19)
Lapponica D. (brunnea Ghl.) (Acrod.) Lappon. 76
Lata Fab. (Apricaria Payk. cf. D. J. 506.)
— Gyll. (Consularis Duft. cf. D. J. 3.)
— St. (Ingenua Duft, cf. D. J. 35.)
— Motsch. (Amath.) Sib. 106
Laticollis Steph. (nitida ? cf. E. Z. 1848. 39.
— Lec. Proc. Phil. 1856.
347. (Curt.) Nebraska.
— Motsch. R. K. p. 58
note 1. (Perc.) Sib.
Latior Kirb. F. B. A. 36. 47. (Curt.) Am. bor.
Latiuscula Chaud.)Helopioïdes) (Leirid.) 110
Lepida Zim. (Am.) 5
— Fairm. (Rufipes. D. cf. D. J. 15.)
Levis St. (Familiaris. cf. D. J. 31.)
Libera Lec. Proc. Phil. 1856. 349. Am. bor.
Liberta Duft. (Ingenua Duft, cf. D. J. 35.)
Limbata Schdt. (Vulgaris var. cf. D. J. 26.)
Linearis St. (Trivialis albin. cf. Zim.)
Littoralis Mann. (Am.) Sitkha. 20
Livida Fab. Schdt. (bifrons Gyll. cf. D. J. 43.
Longicollis Motsch. (Curt.) Kamtsch.? 157
Longipennis Chaud. (Amath.) Sib. or. 107
Longula Lec. Proc. Phil. 1856. 350. Calif.
Lucida Duft. (Am.) 38
— Steph. (Familiaris cf. E. Z. 1848. 39.)
Lucidula D. (Basillaris Say.) (Am.) Am. bor. 40
Luctuosa Germ, (Chlaenius tomentosus D.)
Lugens Zim. (Cel.) Mex. 54
Lunicollis Schdt. 27

Maculipes Grimm. Steierm. col. p. 31. Styrie.
Majuscula Chaud. (Brad.) Sib. or. 171
Mancipium Duft. St. (Patricia Duft.) cf. D. J. 46.
Marginata Curt. (Patricia Duft. cf. E. Z. 1848. 39.)
Marginella Pert. (9. Oode.)
Marginicollis Mor. B. St. Petrg 1862.
n° 53. (Cel.) Sib. or.
Maritima Schdt. (Sylvicola Zim. cf. D. J. 41.)
Megacephala Gebl. (Curt.) Sib. 140
Melancholica Schdt. (Municipalis Duft. cf. D. J. 38,)
Melanogastrica D. (Curt.) Am. R. 143
Metallescens D. (G. Acorius.) Egypt.
Mexicana D. (Cel.) Mex. 56
Microcephala Motsch. (Cel.) Sib. or. 58
Microdera Chaud. (Amath.) Sib. or. 108
Minuta Motsch. (Brad.) Sib. or. 167
Modesta D. (Municipalis Duft), 47
Moerens Zim. (Cel.) Mex. 53
Mongolica Motsch. J. S. 185. (Am.) Sib. Mongol.
Montana D. (Leiocn.) 100
— Chaud. (Spectab. Sch.) (Leirid.)
Monticola Zim. (Cel.) 60
Montivaga St. (Am.) 17
Morio Mén. Fald. Talyche.
Municipalis Duf (Cel.) 47
Musculus Say. (Cel.) Am. bor. 73

Nigra Chaud. (Consularis Duft.) 159
Nigrita Chaud. (Am.) Sib. 28
Nitens P. (Curt.) Chine bor. 122
Nitida St. Steph. (Plebeja Gyll. cf. E. Z. 1848. 39.)
Nobilis Duft. (Leirid.) Autr. 111
— St. (Patricia Duft. cf, D. J. 46.)
— Letzn. (Spectabilis Sch. cf. D. J. 6.)

Obesa Say. (Perc.) Am. bor. 173
Obscura Motsch. J. S. 188. 244. (Am.) Omsk. Sib.
Obscuricornis Motsch. Russ. K. 58. — Col. Jakoustk. 25. 47

Obsoleta Duft. (Similata Gyll. cf. D. J. 20.)
— Dej. (Ovata Fab.)
— Schdt. (Trivialis Duft.)
Obtusa Steph, (Communis Gyll. cf. E. Z. 1848 39.)
— Lec. Proc. Phil. 1856.
348 et 1860. 316, (Curt.) Am. Russ.
Ooptera P. (Leiocn.) Esp. centr. 87
Oregona Lec. Proc. Phil. 1856.
349. (Brad.) Oregon.
Oreophila Imh. cf. Heer. F.
H. 91. (Cel.)
Orichalcica Dws. (Bifrons. Gyll. cf. D. J. 43.)
Orientalis Hope. Proc. Ent. S. 62. ?) Canton.
Orizabæ Zim. (Am.) Mex. 41
Ougsburgeri Heer. (Cursitans Zim. cf. D. J. 37.)
Ovalis St. Cat. (Fallox Lec.) Am. bor.
Ovata Fab. Steph. (Obsoleta Dej. cf. E. Z. 1848. 39.) 15
— Motsch. J. S. 186. (Am.) Sib.
Ovipennis Motsch. col. Calif. 35. (Curt.) Calif.

Pallens St. (Rufocincta Sahlb. cf. D. J. 44.)
Pallida Fab. (Fulva D. G. cf. D. J. I.)
Pallidula Motsch. J. S. 182. Moraw.
B. St. Pet. 1862. 47. (Brad.) Sib.
Pallipes Kirb. F. B. A. 39-54. cf. Lec. Proc. Phil.
1856. 350. Am. bor.
Palustris Baudi. (Am.) 16
Parallela Chaud. (Brad.) Lenkoran. 166
Parvicollis Gebl. Kirghis. 169
Pastica Zim. (Perc.) Russ. m. 174
Patrata Schdt. (Consularis Duft. cf. D. J. 3.)
Patricia Duft. (Perc.) 174
Patruelis Dej. (Cel.) Am. bor. 50
Pedestris P. (Curt.) Am. R. 153
Peregrina Mor. B. St. P.
1862. 51. (Curt.) Sib. or.
Perplexa Dej. (Familiaris var.) 36
Persica Chaud. B. M. 1842. 827. 70 et 1844. 430. 30

Petri Humm. (Apricaria Payk. cf. D. J. 2.)			
Picea St. (Aulica)	(Curt.)		127
Picipes Motsch.	(Curt.)	Sib. occ.	152
Planipennis P.	(Leiocn.)	Caucas.	103
Planiuscula Rsh. (Sabulosa D.)			96
Plebeja Gyll.	(Am.)	(Am.)	9
Plebeja Steph. (Communis cf. E. Z. 1848. 39.)			
— Duft. St. (Patricia Duft. cf. D. J. 46.)			
Poeciloïdes Heer. (Vulgaris var. cf. D. J. 26.)			
Polita Lec.	(Am.)	Nebraska.	24
— Chaud.	(Leiocn.)		96
Prætermissa Sahlb. (Simil. D.)	(Am.)		11
Pratensis St. (Ovata Fab. cf. D. J. 21.)			
Proletaria Kn. (Musculus. S.	(Cel.)	Am. bor.	
Properans Zim. (Cursitans Z.)	(Cel.)		46
Propinqua Mén.	(Curt.)		
Protensa P.	(Am.)	Hudson B.	54
Proxima P. (Intermedia Chaud.)	(Am.)		51
Punctato striata Motsch. col. Amur. p. 96.			
Puncticollis D.	(Leirid.)	Pyrén. or.	114
— Ryl. Newm. Ent. 1841, p. 216.			
Punctulata D. (Erratica Duft.)	(Cel.)		52
Purpurascens Motsch. col. Calif. 31.	(Cel.)	Calif.	
Pyrenæa D.	(Leirid.)	Pyrén. or.	115
Quenselii Gyll.	(Cel.)		60
Rectangula Lec. Proc. Phil. 1856. 355.		Calif.	
Reflexicollis Motsch. J. S. 183.	(Am.)	Caucas.	2
Reflexa P.	(Curt.)	T. neuve.	131
Reichei Coq.	(Perc.)	Algér.	176
Relucens Manh.	(Cel.)	Am. R.	63
Remota Z. (Remotestriata D.	(Cel.)		62
Remotestriata D.	(Cel.)	Am. R.	62
Revelieri Muls. Ann. Lin. Lyon. II. 157.	(Curt.)	Corse.	
Rotundata D.	(Leiocn.)	Esp.	88
Rotundicollis Schf.	(id.)	Esp. c.	86

Rubrica Hald.	(Cel.)	Am. bor.	72
Rufescens. Dej. (Harp.)	(Amath.)		104
Ruficornis D.	(Cel.)		42
Rufimana Motsch. J. S. 175.		Kamtsch.	146
— Kirb. F. B. A. 35-45.	(Curt.)	Am. bor.	
Rufipes D.	(Am.)		2
Rufo-Ænea D.	(Cel.)		43
— Letzn. (Cursitans Z. cf. D. J. 37.)			
Rufocincta Sahlb.			68
— Manh.		Am. bor.	
Rugulosa Heer. (Erratica Duft. cf. D. J. 39.)			
Rupicola Zim.	(Cel.)	Sib. or.	58
Sabulosa D.	(Leiocn.)		96
Saginata Men. Im. Lehm. p. 19.	(Cel.)		
Sahlbergii Zett. (Brunnea Gyll, cf. D. J. 45.)			
Sallei P.	(Am.)	Mex.	41
Saphyrea D.	(Am.)	Bannat.	14
Saxicola Mén.	(Cel.)	Caucas.	64
Scitula Zim.	(Am.)	Calif.	8
Septentrionalis Curt. Arm. a. Mag. h. Hist. V. 274.		Ecosse.	
— Lec. (Brad.) Proc. Phil. 1856. 359.		L. supér.	
Sicula D.	(Perc.)		175
Silvicola Zim.	(Cel.)		61
Similata D.	(Am.)		11
Simplex D.	(Leiocn.)	Esp.	91
Sinuata Motsch. J. S. 187.	(Am.)	Omsk (Sib.)	
Sinuaticollis Mor. B. St. P. 1862. 217.	(Brad.)	Sib. or.	
Solata Coq.	(Curt.)	Algér.	
Somnolenta P.	(Curt.)	Am. R.	134
Songarica P.	(Amath.)	Dsoungar.	106
Spectabilis Schm.	(Leirid.)	Illyr.	112
Spinipes Schdt. (Aulica D. cf. D. J. 7.)			
Splendida Hald. (interstitialis D. cf. Lec. Proc. Phil. 1856. 353.			
Spreta D.	(Am.)		32
Strenua Zim.	(Am.)		7
Striatopunctata D.	(Am.)		1
Striolata P.	(Curt.)	Kamtch.	147

Stupida Lec. Proc-Phil. 1856.
347. (Curt.) Calif.
Subænea Steph. (Obsoleta cf. E. Z. 1848. 39.)
— St. (Ingenua Duft. cf. D. J. 35.
— Lec. (Cel.) Etats-Unis. 69
— M. L. (G. Barysomus.)
Subconvexa P. (Am.) Algér. 15
Subdepressa P. (Leirid.) Caucase. 102
Subolivacea M. L. (G. Barysomus.)
Subplanata P. (Amath.) Sibér. 105
Subpunctata Lec. Proc. Phil. 1856. 352. M. Roch.
Substriata P. (Curt.) Mex. 133
Superans Woll. col. Mad. 48. (Am.) Madère.
Syriaca P. (Leiocn.) Syrie. 93

Terrestris Lec. Proc. Phil. 1856. 354. Nebraska.
Tescicola Zim. (Cel.) Kirgh. 58
Testudinea P. (Leiocn.) Esp. 84
Texana P. (Cel.) Texas. 74
Tibialis Payk, (Am.) 39
Timida Motsch. J. S. 192. (Perc.) Kirgh.
Torrida Ill. (Curt.) Eur. bor. 142
— Steph. (Apricaria. cf. E. Z. 1848. 39.
Transversicollis P. (Curt.) Am. R. 124
Tricolor M. L. (G. Barysomus.)
Tricuspidata St. (Am.) 6
— Steph. ? cf. E. Z. 1848. 39.
Tridens. Mor. B. St. P. 1862
n° 219. (Am.) Sib. or.
Tripartita Motsch. 20
Tristis P. (Curt.) Canada b. 154
Trivialis Gyll, (Am.) 30
— Duft. St. (Ovata F. cf. D. J. 21.)
Tumida Moraw. B. St. P.
1862. 50. (Curt.) Sib. or.

Uralensis Motsch. (Curt.) Sib.
Vagabunda Duft. St. (Communis. cf. D. J. 24.)

Valida Fairm. (Striatopunctata D.)
Varicolor Heer. (cf. D. J. 19.)
Vectensis Daws. (Strenua Z. cf. D. J. 18.)
Versuta. Woll. can. col. 51. (Cottyi?) Canar.
Viatica Motsch. J. S. 184. (Am.) Transbaïcal.
Violacea Motsch. J. S. 186. (Am.) Sibér.
Viridis Duft. St. (Tibialis cf. D. J. 33.)
Volgensis Chaud. (Curt.) Sarepta. 138
Vulgaris Panz. (Am.) 27
— Fab. (Acuminata Payk. cf. D. J. 30.)
— Daws. (Communis Pz. cf. D. J. 24.)
— Schdt. Duft. (Trivialis Gyll. cf. D. J. 29.
— Gyll. Zett. (Erratica Dft. cf. D. J. 39.)

Zabroïdes Zim. (cf. D. J. I. 549.)
Zimmermanni Heer. (bifrons Gyll. cf. D. J. 43.)

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages.
Coquilhat,	Expériences sur la détermination pratique des moments d'inertie des Canons en bronze, longs et courts de 6 et de 12.	1
Noel,	Mémoire relatif à différents sujets de mathématiques élémentaires.	51
Folie,	Nouvelles tables usuelles des logarithmes, des nombres naturels et des lignes trigonométriques et tables inverses, en deux feuilles, accompagnées d'une introduction renfermant un précis de Trigonométrie pure, ainsi que la disposition et l'usage de ces tables.	89
Stammer,	Des surfaces réglées et des surfaces enveloppes.	137
Putzeys,	Notes sur les Notiophiles.	155

Fig 1.

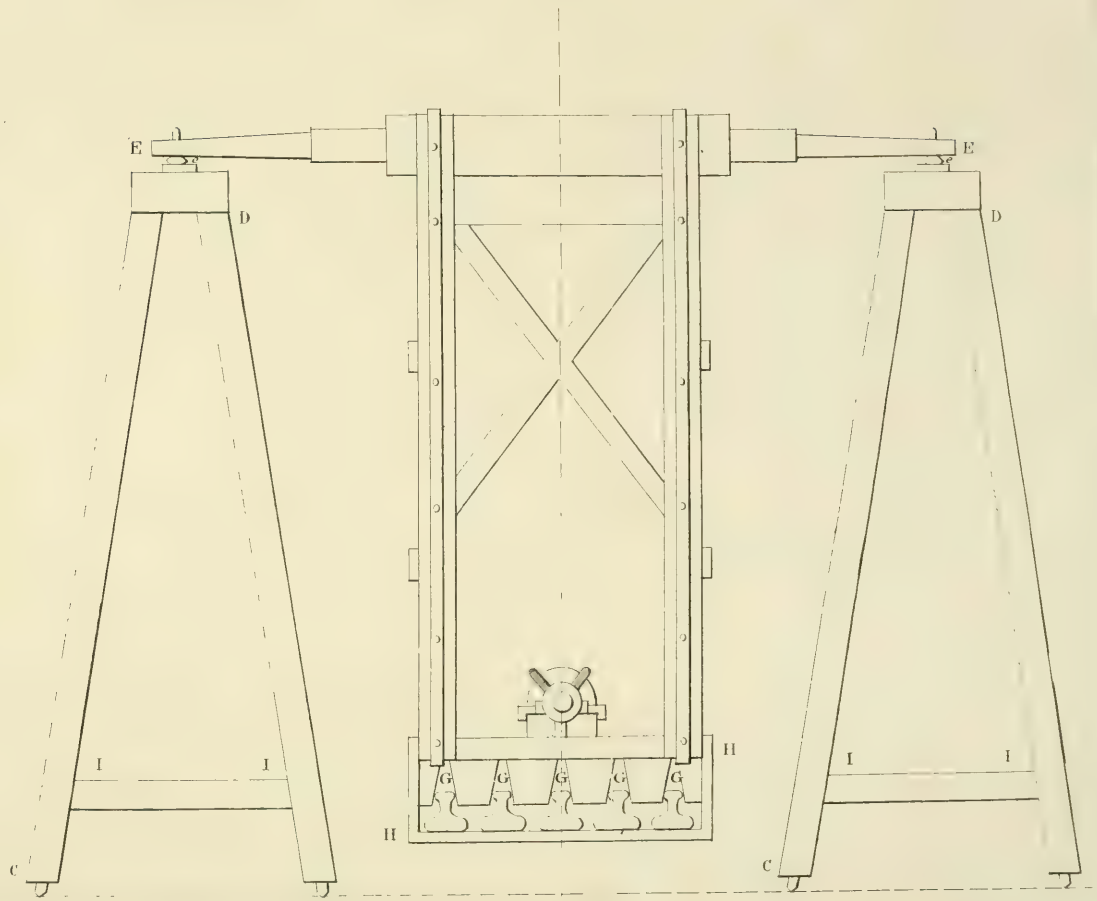
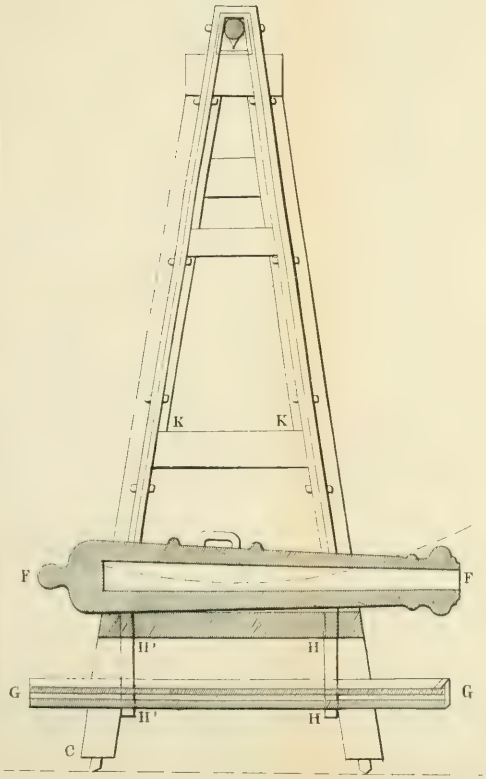
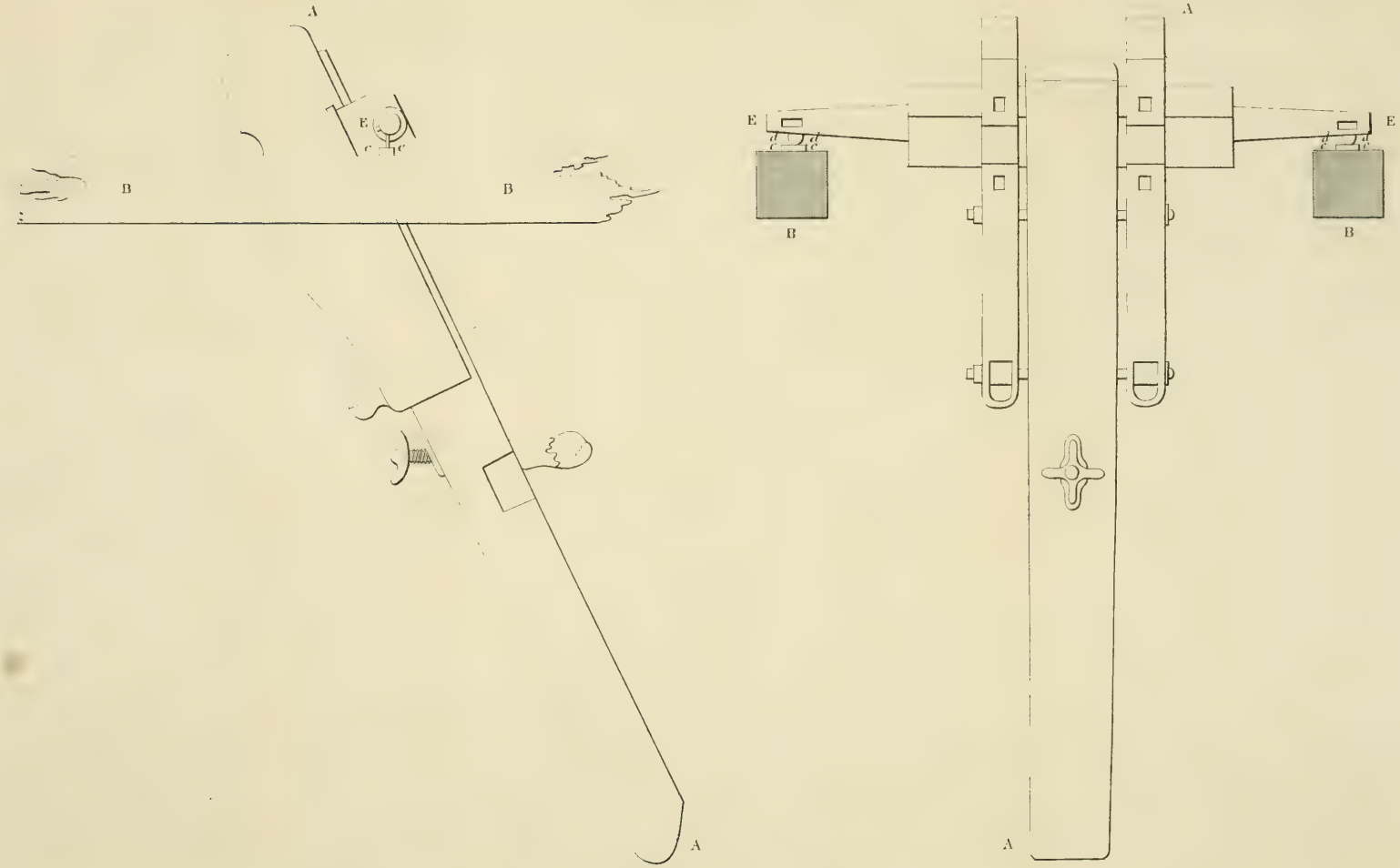
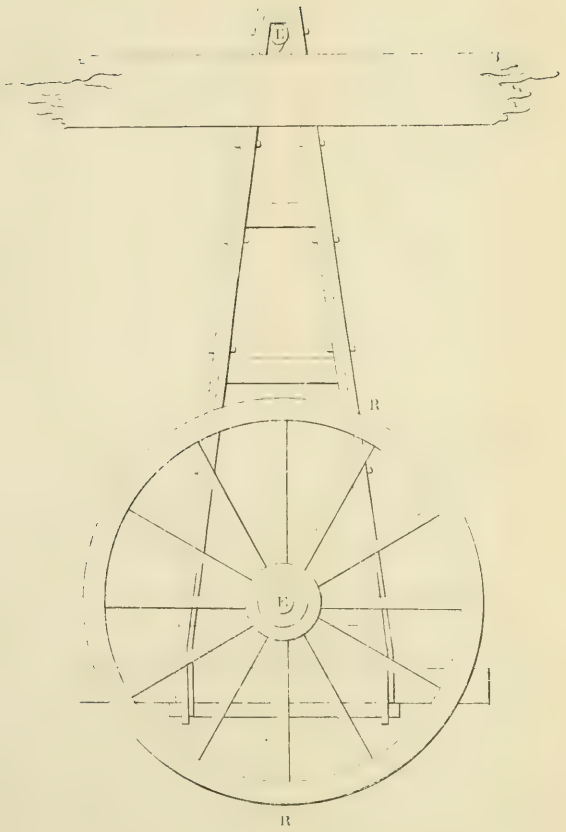


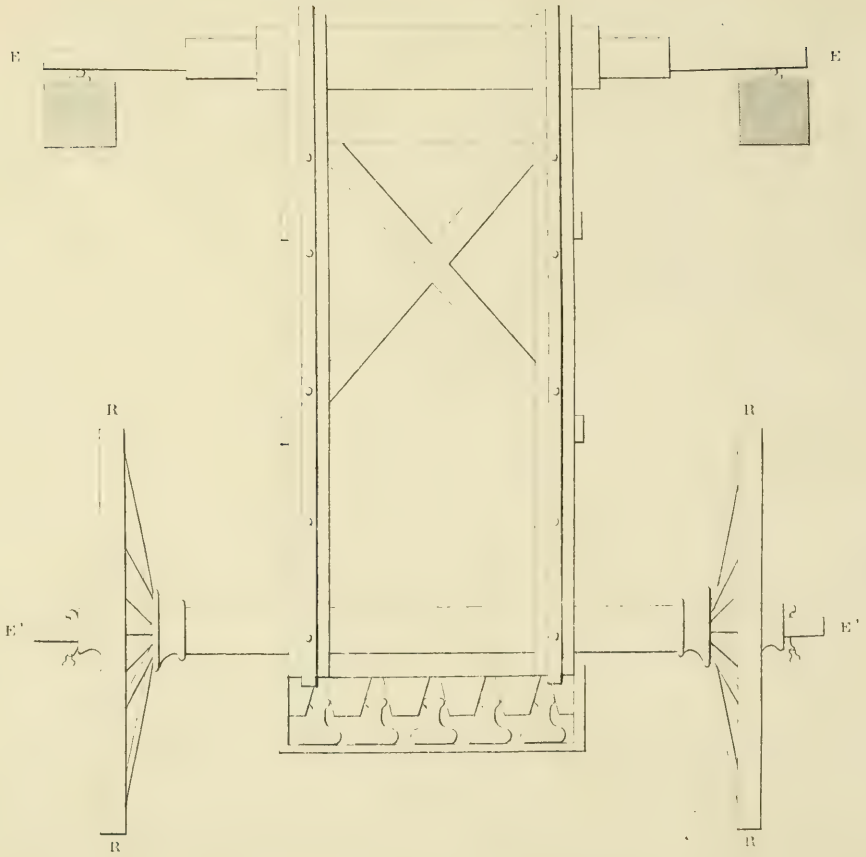
Fig 2



Coupe suivant A.B.


A
E
c
c
B
B
A
A
E
E
d
d
c
c
B
B
A


E
R
E
R


E
E
R
R
E'
E'
R
R

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Log π = 0,49715. — log 2 π = 0,79818. — log $\frac{\pi}{2}$ = 0,19612. — log $\frac{\pi}{4}$ = 9,89509. — log $\frac{4}{5}\pi$ = 0,62209. — log $\frac{\pi}{30}$ = 9,02003. — log $\sqrt[3]{\pi}$ = 0,24857. — log $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$ = 9,90553.
log $\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}$ = 0,20736. — log g = 0,99162. — log $2g$ = 1,29265.

Log.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1050	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

Log.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLE DES LOGARITHMES DES LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

	Log. sin.						Log. tang.						Log. cosin.						
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	0′	10′	20′	30′	40	50′	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0°		4637	7648	9408	0658	1627		4637	7648	9408	0658	1627	9999	9999	9999	9999	9999	9999	89°
1°	2419	5088	7668	4179	4657	5650	2419	5089	7669	4181	4658	5655	9	9	9	9	8	8	88°
2°	5428	5776	6097	6597	6677	6940	5451	5779	6101	6601	6682	6945	7	7	6	6	5	5	87°
3°	7188	7425	7645	7857	8059	8251	7191	7429	7652	7865	8067	8261	4	3	3	2	1	0	86°
4°	8456	8615	8785	8946	9104	9256	8446	8624	8795	8960	9118	9272	89	89	88	87	86	85	85°
5°	9403	9545	9682	9816	9945	*0070	9420	9563	9701	9836	9966	*0093	85	82	81	80	79	77	84°
6°	0192	0311	0426	0539	0648	0755	0216	0336	0455	0567	0678	0786	76	75	75	72	71	69	83°
7	0859	0961	1060	1157	1252	1345	0891	0995	1096	1194	1291	1585	68	66	64	65	61	59	82°
8°	1456	1525	1612	1697	1781	1863	1478	1569	1658	1745	1851	1915	58	56	54	52	50	48	81°
9°	1945	2022	2100	2176	2251	2324	1997	2078	2158	2256	2315	2589	46	44	42	40	38	36	80°
10°	2597	2468	2538	2606	2674	2740	2465	2556	2609	2680	2750	2819	34	31	29	27	24	22	79°
11°	2806	2870	2954	2997	5058	5119	2887	2955	5020	5085	5149	5212	19	17	14	12	09	07	78°
12°	5179	5238	5296	5355	5410	5466	5275	5556	5597	5458	5517	5576	04	01	9899	9896	9895	9890	77°
13°	5521	5575	5629	5682	5754	5786	5654	5691	5748	5804	5859	5914	9887	9884	81	78	75	72	76°
14°	5857	5887	5957	5986	4035	4085	5968	4021	4074	4127	4178	4250	69	66	65	59	56	53	75°
15°	4150	4177	4225	4269	4514	4559	4281	4551	4581	4450	4479	4527	49	46	45	59	56	52	74°
16°	4405	4447	4491	4555	4576	4618	4575	4622	4669	4716	4762	4808	28	25	21	17	14	10	75°
17°	4659	4700	4741	4781	4821	4861	4855	4898	4945	4987	5051	5075	06	02	9798	9794	9790	9786	72°
18°	4900	4959	4977	5015	5052	5090	5118	5161	5205	5245	5287	5329	9782	9779	74	70	65	61	71°
19°	5126	5165	5199	5255	5270	5306	5570	5411	5451	5491	5551	5571	57	52	48	45	59	54	70°
20°	5541	5575	5409	5445	5477	5510	5611	5650	5689	5727	5766	5804	50	25	21	16	11	06	69°
21°	5545	5576	5609	5641	5675	5704	5842	5879	5917	5954	5991	6028	02	9697	9692	9687	9682	9677	68°
22°	5756	5767	5798	5828	5859	5889	6064	6100	6156	6172	6208	6245	9672	67	61	56	51	46	67°
25°	5919	5948	5978	6007	6056	6065	6279	6514	6548	6585	6417	6452	40	55	29	24	18	15	66°
24°	6095	6121	6149	6177	6205	6252	6486	6520	6555	6587	6620	6654	07	02	9596	9590	9584	9579	65°
25°	6259	6286	6515	6540	6566	6592	6687	6720	6752	6785	6817	6850	9575	9567	61	55	49	45	64°
26°	6418	6444	6470	6495	6521	6546	6882	6914	6946	6977	7009	7040	57	50	24	18	12	05	65°
27°	6570	6595	6620	6644	6668	6692	7072	7105	7154	7165	7196	7226	9499	9492	9486	9479	9475	9466	62°
28°	6716	6740	6765	6787	6810	6855	7257	7287	7517	7548	7578	7408	59	55	46	59	52	25	61°
29°	6856	6878	6901	6925	6946	6968	7458	7467	7497	7526	7556	7585	18	11	04	9597	9590	9585	60°
50°	6990	7012	7055	7055	7076	7097	7614	7644	7675	7701	7750	7759	9575	9568	9561	55	46	58	59°
51°	7118	7159	7160	7181	7201	7222	7788	7816	7845	7875	7902	7950	51	25	15	08	00	9292	58°
52°	7242	7262	7282	7502	7522	7542	7958	7986	8014	8042	8070	8097	9284	9276	9268	9260	9252	44	57°
55°	7561	7580	7400	7419	7458	7457	8125	8155	8180	8208	8255	8265	56	28	19	11	05	9194	56°
54°	7476	7494	7515	7551	7550	7568	8290	8517	8544	8571	8598	8425	9186	9177	9169	9160	9151	42	55°
55°	7586	7604	7622	7640	7657	7675	8452	8479	8506	8555	8559	8586	54	25	16	07	9098	9089	54°
56°	7692	7710	7727	7744	7761	7778	8615	8659	8666	8692	8718	8745	9080	9070	9061	9052	42	55	55°
57°	7795	7811	7828	7844	7861	7877	8771	8797	8824	8850	8876	8902	25	14	04	8995	8985	8975	52
58°	7895	7910	7926	7941	7957	7975	8928	8954	8980	9006	9052	9058	8965	8955	8945	55	25	15	51°
59°	7989	8004	8020	8055	8050	8066	9084	9110	9155	9161	9187	9212	05	8895	8884	8874	8864	8855	50°
40°	8081	8096	8111	8125	8140	8155	9258	9264	9289	9515	9541	9566	8845	52	21	10	00	8789	49°
41°	8169	8184	8198	8215	8227	8241	9592	9417	9445	9468	9494	9519	8778	8767	8756	8745	8755	22	48°
42°	8255	8269	8285	8297	8511	8524	9544	9570	9595	9621	9646	9671	11	8699	8688	8676	8665	8655	47°
45°	8558	8551	8565	8578	8591	8405	9697	9722	9747	9775	9798	9825	8641	29	18	06	8594	8582	46°
44°	8418	8451	8444	8457	8469	8482	9848	9874	9899	9924	9949	9975	8569	8557	8545	8552	20	07	45°
45°	8495	8507	8520	8552	8545	8557	0000	0025	0051	0076	0101	0126	8495	8482	8469	8457	8444	8451	44°
	60′	50′	40′	50′	20′	10′	60′	50′	40′	50′	20′	10′	60′	50′	40′	50′	20	10′	
	Log. cosin.						Log. cotang.						Log. sin.						

TABLES INVERSES POUR LES

Sin.

Tang.

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
5°	00	44₀	45₀	46₀	47₀	47₃	48₂	49₁	50₀	50₅	51₄	5°	00	42₄	45₃	44₁	45₀	45₅	46₃	47₂	48₁	49₀	49₅	00
	01	52₂	52₂	54₀	54₅	55₄	56₅	57₂	58₁	59₀	59₅		00	50₅	51₂	52₁	55₀	55₅	54₄	55₂	56₁	57₀	57₅	01
6°	02	00₄	01₅	02₂	05₀	04₀	04₅	05₄	06₅	07₂	08₁		00	58₄	59₅	*00₂	*01₁	*02₀	*02₅	*05₄	*04₅	*05₂	*06₁	02
	05	08₀	10₀	10₅	11₄	12₅	15₂	14₁	15₁	16₀	16₅	6°	00	07₀	07₅	08₄	09₅	10₂	11₁	12₀	12₅	15₄	14₄	05
	04	17₄	18₅	19₅	20₂	21₁	22₁	25₀	25₅	24₅	25₄		01	15₅	16₂	17₁	18₀	18₅	19₅	20₄	21₅	22₂	25₁	04
	05	26₅	27₅	28₂	29₁	50₁	51₀	52₀	52₅	55₅	54₁		05	24₁	25₀	25₅	26₅	27₄	28₅	29₂	50₂	51₁	52₁	05
	06	55₄	56₅	57₂	58₂	59₂	40₁	41₁	42₀	45₀	45₅		06	55₀	55₅	54₅	55₄	56₄	57₅	58₂	59₂	40₁	41₁	06
	07	44₅	45₅	46₄	47₁	48₄	49₅	50₅	51₅	52₂	55₂		07	42₀	45₀	45₅	44₅	45₄	46₄	47₄	48₅	49₅	50₂	07
	08	54₂	55₂	56₁	57₁	58₁	59₁	*00₁	*01₀	*02₀	*05₀		08	51₂	52₂	55₁	54₁	55₁	56₀	57₀	58₀	58₅	59₅	08
7°	09	04₀	05₀	06₀	07₀	08₀	09₀	10₀	11₀	12₀	15₀	7°	09	00₅	01₅	02₄	05₄	04₄	05₄	06₄	07₄	08₅	09₅	09
	10	14₀	15₀	16₀	17₀	18₀	19₀	20₀	21₀	22₀	25₀		10	10₅	11₅	12₅	15₅	14₅	15₅	16₅	17₅	18₅	19₅	10
	11	24₁	25₁	26₁	27₁	28₂	29₂	50₂	51₂	52₂	55₅		11	20₅	21₅	22₅	25₅	24₅	25₅	26₅	27₅	28₅	29₅	11
	12	54₅	55₅	56₄	57₄	58₄	59₅	40₅	42₀	45₀	44₀		12	50₄	51₄	52₄	55₄	54₄	55₄	56₅	57₅	58₅	59₅	12
	15	45₁	46₁	47₂	48₂	49₅	50₅	51₄	52₅	55₅	55₀		15	41₀	42₀	45₀	44₁	45₁	46₁	47₂	48₂	49₅	50₅	15
	14	56₀	57₁	58₂	59₂	*00₅	*01₄	*02₄	*05₅	*04₅	*05₀		14	51₅	52₄	55₄	54₅	55₅	57₀	58₀	59₁	*00₁	*01₂	14
8°	15	07₂	08₂	09₅	10₄	11₅	12₅	14₀	15₁	16₂	17₅	8°	15	02₂	01₅	04₄	05₄	06₅	07₅	09₀	10₁	11₂	12₂	15
	16	18₄	19₅	21₀	22₁	25₂	24₅	25₄	26₅	28₀	29₁		16	15₅	14₄	15₄	16₅	18₀	19₁	20₂	21₂	22₅	25₄	16
	17	50₂	51₅	52₄	55₅	54₂	55₂	57₅	58₄	59₅	41₁		17	24₅	26₀	27₁	28₂	29₅	50₅	51₄	52₅	54₀	55₁	17
	18	42₂	45₅	44₅	46₀	47₁	48₅	49₄	50₅	52₁	55₂		18	56₂	57₅	58₅	40₀	41₁	42₂	45₅	44₄	45₅	47₀	18
	19	54₄	55₅	57₁	58₂	59₅	*00₅	*02₁	*05₂	*04₄	*05₅		19	48₁	49₅	50₄	51₅	55₀	54₂	55₅	56₄	57₅	59₁	19
9°	20	07₁	08₅	09₄	11₀	12₂	15₅	14₅	16₁	17₂	18₄	9°	20	00₂	01₅	02₅	04₀	05₂	06₅	07₄	09₀	10₁	11₅	20
	21	20₀	21₂	22₄	24₀	25₁	26₅	27₅	29₁	50₅	51₅		21	12₄	14₀	15₄	16₅	17₅	19₀	20₂	21₅	22₅	24₁	21
	22	55₁	54₅	55₅	57₄	58₅	59₅	41₁	42₅	44₀	45₂		22	25₂	26₄	28₀	29₄	50₅	51₅	55₁	54₂	55₄	57₀	22
	25	46₄	48₀	49₂	50₅	52₁	55₅	54₅	56₂	57₄	59₀		25	58₂	59₄	40₅	42₁	45₅	44₅	46₁	47₅	48₅	50₁	25
10°	24	00₅	01₅	05₂	04₄	06₀	07₅	08₅	10₂	11₄	15₁		24	51₅	52₅	54₁	55₂	56₅	58₁	59₅	*01₀	*02₂	*05₄	24

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
	25	14'3	16'0	17'3	18'3	20'2	21'3	23'1	24'4	26'1	27'4		10°	25	05'0	06'2	07'4	09'1	10'3	11'5	13'1	14'4	16'0	17'2	25
	26	29'0	30'3	33'3	35	36'3	38'0	39'2	40'5	42'2				26	18'5	20'1	21'4	23'0	24'2	25'5	27'1	28'4	30'0	31'3	26
	27	45'5	47'2	48'3	48'2	50'0	51'5	53'0	54'3	56'0	57'5			27	32'5	34'2	35'4	37'1	38'4	40'0	41'3	43'0	44'2	45'5	27
	28	59'1	*00'4	*02'1	*03'4	*05'2	*06'5	*08'2	*10'0	*11'3	*13'0			28	47'2	48'4	50'1	51'4	53'1	54'4	56'0	57'3	59'0	*00'3	28
11°	29	14'4	16'1	17'5	19'2	21'0	22'3	24'1	25'4	27'2	29'0		11°	29	02'0	03'3	05'0	06'3	08'0	09'3	11'0	12'3	14'0	15'3	29
	30	30'5	32'1	33'5	35'2	37'0	38'4	40'2	42'0	43'3	45'1			30	17'0	18'3	20'1	21'4	23'1	24'4	26'1	27'4	29'2	30'5	30
	31	46'3	48'5	50'1	51'5	53'3	55'1	56'5	58'3	60'1	61'5			31	52'2	54'0	55'3	57'0	58'4	40'1	41'4	43'2	44'5	46'3	31
12°	32	05'3	05'2	07'0	08'4	10'2	12'1	13'5	15'3	17'1	19'0			32	48'0	49'4	51'1	52'5	54'3	56'0	57'4	59'1	*00'5	*02'3	32
	33	20'1	22'5	24'1	25'5	27'4	29'2	31'1	33'0	34'4	36'3		12°	33	04'0	05'4	07'2	09'0	10'3	12'1	13'5	15'3	17'1	18'5	33
	34	38'1	40'0	41'5	43'3	45'2	47'1	49'0	50'5	52'5	54'2			34	20'5	22'1	23'4	25'2	27'0	28'4	30'2	32'1	33'5	35'5	34
	35	56'1	58'0	59'5	61'4	63'3	65'2	67'1	69'0	70'5	72'4			35	37'1	38'5	40'3	42'1	43'5	45'4	47'2	49'0	50'4	52'3	35
13°	36	14'4	16'3	18'2	20'1	22'1	24'0	25'5	27'3	29'4	31'3			36	54'1	55'5	57'4	59'2	*01'1	*02'5	*04'4	*06'2	*08'0	*09'5	36
	37	33'3	35'2	37'2	39'1	41'1	43'0	45'0	47'0	48'5	50'5			37	11'4	13'2	15'1	16'5	18'4	20'2	22'1	24'0	25'5	27'5	37
	38	52'5	54'4	56'4	58'4	*00'4	*02'4	*04'4	*06'4	*08'3	*10'3		13°	38	29'2	31'1	33'1	34'5	36'5	38'4	40'2	42'0	43'5	45'5	38
14°	39	12'5	14'4	16'4	18'4	20'4	22'4	24'4	26'4	28'3	30'3			39	47'5	49'2	51'1	53'0	54'5	56'4	58'3	*00'3	*02'2	*04'1	39
	40	32'5	35'0	37'0	39'3	41'3	43'3	45'2	47'2	49'5	51'5		14°	40	06'0	07'5	09'3	11'4	13'3	15'3	17'2	19'1	21'1	23'0	40
	41	55'4	55'5	57'5	60'1	62'1	64'2	66'2	68'3	70'4	72'5			41	24'5	26'3	28'4	30'4	32'5	34'3	36'3	38'2	40'2	42'1	41
15°	42	15'0	17'1	19'2	21'5	23'4	25'5	28'0	30'1	32'5	34'4			42	44'1	46'1	48'1	50'0	52'0	54'0	56'0	58'0	59'5	*01'3	42
	43	56'3	59'0	41'2	43'3	45'4	48'0	50'1	52'5	54'4	57'0		15°	43	03'5	05'5	07'5	09'5	11'5	13'5	15'5	17'5	19'5	21'5	43
	44	59'1	*01'3	*03'5	*06'0	*08'2	*10'4	*13'0	*15'1	*17'3	*19'5			44	21'0	23'0	25'0	28'0	30'0	32'0	34'1	36'1	38'1	40'2	42'2	44
	45	22'1	24'5	26'5	29'1	31'5	33'5	36'2	38'4	41'0	43'2			45	44'2	46'3	48'5	50'4	52'4	54'5	56'5	59'0	*01'0	*03'1	45
16°	46	45'4	48'1	50'5	53'0	55'2	57'4	60'1	62'5	65'0	67'3		16°	46	06'2	07'2	09'5	11'4	13'4	15'5	18'0	20'1	22'2	24'2	46
	47	09'5	12'2	14'5	17'2	19'4	22'1	24'4	27'1	29'4	32'1			47	26'3	28'4	30'5	33'0	35'1	37'2	39'5	41'4	43'5	46'0	47
	48	34'4	37'1	39'4	42'1	44'4	47'1	49'4	52'2	54'5	57'3			48	48'1	50'3	52'4	54'5	57'0	59'1	*01'5	*03'4	*05'5	*08'1	48
17°	49	00'0	02'4	05'1	07'5	10'2	13'0	15'4	18'1	20'5	23'3		17°	49	10'2	12'4	14'5	17'0	19'2	21'5	23'5	26'1	28'2	30'4	49
	50	26'1	28'4	31'2	34'0	36'4	39'2	42'0	44'4	47'5	50'1			50	52'5	55'1	57'5	59'5	42'0	44'2	46'4	49'0	51'1	53'5	50
	51	52'5	55'5	58'2	*01'0	*03'4	*06'3	*09'1	*12'0	*14'4	*17'3			51	55'3	58'1	*00'5	*02'5	*05'1	*07'3	*09'5	*12'1	*14'3	*17'0	51
19°	52	20'1	23'0	25'5	28'4	31'2	34'1	37'0	39'5	42'4	45'3		18°	52	19'2	21'4	24'0	26'2	28'5	31'1	23'5	36'3	38'4	40'5	52
	53	48'2	51'1	54'1	57'0	59'5	*02'4	*05'1	*08'5	*11'5	*14'2			53	43'1	45'5	48'0	50'2	52'5	55'1	57'1	*00'1	*02'2	*05'0	53
20°	54	17'2	20'1	23'1	26'1	29'0	32'0	35'0	38'0	41'0	44'1		19°	54	07'2	09'5	12'2	14'5	17'1	19'4	22'1	24'4	27'1	29'4	54
	55	47'0	50'0	53'0	56'0	59'0	*02'0	*05'1	*08'1	*11'1	*14'2			55	52'1	54'4	57'1	59'4	42'1	44'4	47'1	49'4	52'1	54'5	55
21°	56	17'2	20'5	23'5	26'4	29'5	32'5	35'0	38'1	41'2	44'3			56	57'2	59'5	*02'2	05'0	07'3	*00'0	*12'4	*15'1	*17'4	*20'2	56
	57	48'4	51'5	55'0	58'1	*01'2	*04'5	*07'5	*11'0	*14'1	*17'5		20°	57	22'5	25'3	28'1	30'4	33'0	35'2	38'0	40'3	43'1	46'2	57
22°	58	20'4	24'0	27'2	30'5	33'5	37'1	40'2	43'4	47'0	50'2			58	49'0	51'4	54'1	56'5	59'3	*02'1	*04'4	*07'5	11'0	*14'2	58
	59	53'4	57'0	*00'2	*03'5	*07'1	*10'5	*14'0	*17'2	*20'4	*24'1		21°	59	15'5	18'1	20'5	23'5	26'1	29'0	31'4	34'2	37'0	39'5	59
	60	27'1	31'0	34'3	38'0	41'2	44'5	48'2	51'5	55'2	58'5			60	42'5	45'1	48'0	50'5	53'2	56'1	58'5	*01'4	*04'2	*07'1	60
24°	61	02'5	06'0	09'3	13'0	16'4	20'1	23'5	27'2	31'0	34'4		22°	61	09'3	12'4	15'3	18'1	21'0	23'5	26'3	29'2	32'1	35'0	61
	62	38'1	41'5	45'3	49'1	52'5	56'5	*00'1	*03'5	*07'4	*11'2			62	37'5	40'4	43'3	46'1	49'0	51'5	54'4	57'5	*00'5	*03'2	62
25°	63	15'0	18'5	22'3	26'2	30'0	33'5	37'4	41'3	45'1	49'1		23°	63	06'1	09'0	11'5	14'4	17'4	20'5	23'2	26'1	29'1	32'0	63
	64	52'5	56'5	*00'4	*04'5	*08'2	*12'1	*16'1	*20'0	*24'0	*28'0			64	35'0	37'5	40'1	43'1	46'5	49'3	52'2	55'1	58'2	*01'1	64
26°	65	31'5	35'5	39'4	43'5	47'5	51'5	55'5	59'5	*03'5	*07'5		24°	65	04'1	07'1	10'0	13'0	16'0	19'0	22'0	24'5	27'5	30'5	65
27°	66	12'0	16'0	20'1	24'2	28'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			66	[illegible]	[illegible]	[illegible]	42'0	45'0	48'0	51'0	53'5	56'5	*01'0	66
	67	55'1	57'5	*01'4	*05'5	*10'1	*14'2	*18'4	*22'5	*27'1	*31'5		25°	67	04'0	07'0	10'1	13'1	16'1	19'2	22'2	25'2	28'5	31'5	67
28°	68	35'5	40'0	44'2	48'5	53'1	57'3	*01'5	*06'2	*10'5	*15'1			68	34'4	37'4	40'5	43'5	47'0	50'1	53'2	56'2	59'5	*02'5	68
29°	69	19'5	24'0	28'3	33'0	37'3	42'0	46'3	51'0	55'3	60'1		26°	69	05'4	08'5	12'0	15'0	18'1	21'2	24'5	27'4	30'5	34'0	69
	70	04'4	09'2	13'5	18'5	23'1	27'5	32'5	37'4	41'5	46'3			70	37'1	40'2	43'3	46'4	49'5	53'0	56'2	59'3	*02'4	*05'5	70
	71	51'2	56'0	*00'5	*05'5	*10'2	*15'1	*20'0	*24'4	*29'4	*34'3		27°	71	09'1	12'2	15'3	18'3	22'0	25'1	28'3	31'4	35'0	38'1	71
31°	72	59'2	44'1	49'1	54'0	59'0	*03'5	*08'5	*13'5	*18'3	*23'5			72	41'5	44'1	48'0	51'1	54'5	57'5	*01'0	*04'2	*07'4	*11'0	72
32°	73	28'5	34'0	39'0	44'1	49'1	54'2	59'5	*04'4	*09'5	*15'1		28°	73	14'1	17'3	20'5	24'1	27'5	30'5	34'1	37'3	40'5	44'1	73
33°	74	20	25'0	30'3	35'5	41'1	46'2	51'4	57'0	*02'2	*07'4			74	47'3	50'5	54'1	57'5	*00'3	*04'1	*07'5	11'0	*14'2	*17'4	74
	75	15'0	18'5	23'3	29'2	34'3	40'1	45'1	51'1	56'4	*02'2			75	21'0	24'3	27'3	31'1	34'4	38'0	41'2	44'5	48'1	51'4	75
35°	76	07'3	13'2	19'0	24'4	30'2	36'5	41'4	47'2	53'0	58'4			76	55'0	58'5	*02'1	*05'5	*08'5	*12'4	*15'5	*19'1	*22'5	*26'2	76
36°	77	01'5	10'2	16'0	21'5	27'4	33'4	39'3	45'2	51'2	57'1		30°	77	29'3	33'1	36'2	39'5	43'2	46'5	50'2	53'5	57'4	*00'3	77
37°	78	05'1	09'1	15'1	21'1	27'2	33'2	39'3	45'3	51'4	57'5		31°	78	04'2	07'5	11'2	14'5	18'2	21'5	25'2	28'5	32'2	36'1	78
38°	79	04'0	10'2	16'5	22'5	29'0	35'2	41'4	48'0	54'3	*00'5			79	39'5	43'0	46'5	50'1	53'4	57'1	*00'4	*04'1	*07'5	*11'3	79
	80	07'2	13'1	20'1	26'4	33'1	39'4	46'2	53'0	59'5	*06'1		32°	80	15'0	18'4	22'1	25'4	29'2	32'5	36'5	40'1	43'4	47'2	80
40°	81	12'5	19'4	26'2	33'0	39'3	46'1	53'5	*00'2	*07'2	*14'1			81	50'5	54'5	58'1	*01'4	*05'2	*08'5	*12'1	*16'1	*19'5	*23'3	81
41°	82	21'1	28'1	35'1	42'1	49'2	56'2	*03'5	*10'4	*17'5	*25'0		33°	82	27'1	30'5	34'3	38'1	41'4	45'2	49'0	52'4	56'2	*00'0	82
42°	83	32'2	39'3	46'3	54'1	*01'4	*09'0	*16'5	*25'5	*31'2	39'1		34°	83	05'4	07'2	11'0	14'4	18'3	22'1	25'5	29'3	33'1	36'5	83
43°	84	46'3	54'1	*01'4	*09'5	*17'1	*24'5	*32'1	*40'5	*48'2	*56'0			84	40'4	44'2	48'0	51'4	55'1	59'1	*02'5	*06'4	*10'2	*14'0	84
	85	04'0	12'0	20'0	28'0	36'1	44'1	52'2	*00'5	*08'5	*17'3		35°	85	17'5	21'5	25'2	29'0	32'4	36'3	40'1	44'0	47'4	51'3	85
45°	86	25'2	33'4	42'0	50'3	59'0	*07'5	*16'0	*24'5	*33'1	*41'5			86	55'2	59'0	*02'5	*06'3	10'5	*14'1	*17'3	*21'4	*25'5	*29'1	86
47°	87	50'1	59'2	*08'1	*17'0	*26'0	*34'5	*43'5	*52'5	*02'0	*11'1		36°	87	33'0	36'5	40'5	44'2	48'1	52'0	55'5	59'3	*03'2	*07'1	87
49°	88	20'2	29'3	38'5	48'1	57'4	*07'0	*16'5	*26'1	*35'4	*45'2		37°	88	11'5	14'5	18'4	22'5	26'2	30'0	33'4	37'4	41'5	45'4	88
50	89	55'1	04'5	*14'4	*24'4	*34'5	*44'5	*54'4	*04'4	*15'0	*25'1			89	49'4	53'0	56'5	*00'4	*04'3	*08'2	*12'2	*16'1	*20'0	*23'5	89
	90	35'3	45'5	56'2	*06'5	*17'5	*28'1	*38'5	*49'4	*00'3	*11'2		38°	90	27'4	31'5	35'2	39'1	43'1	47'0	50'4	54'4	58'5	*02'5	90
54°	91	22'2	33'3	44'4	55'3	*07'1	*18'4	*30'0	*41'4	*52'5	*05'0		39°	91	06'2	10'1	14'0	18'0	21'5	25'4	29'1	33'3	37'2	41'4	91
56°	92	16'5	28'4	40'4	52'5	*04'0	*17'2	*29'4	*42'1	*54'4	*07'2			92	45'1	49'0	53'0	56'5	*00'4	*04'5	*08'3	*12'3	*16'2	*20'1	92
58°	93	20'1	33'0	46'0	59'1	*12'2	*25'4	*39'1	*52'4	*06'3	*20'2		40°	93	24'1	28'0	32'0	35'5	39'5	43'4	47'4	51'5	55'5	59'5	93
60°	94	34'1	48'2	*02'3	*17'0	*31'3	*46'1	*01'0	*16'0	*31'0	*46'2		41°	94	03'2	07'1	11'1	15'0	19'0	22'3	26'8	30'3	34'4	38'4	94
63°	95	01'5	17'3	33'2	49'2	*05'5	*22'0	*38'3	*55'2	*12'2	29'1			95	42'5	46'3	50'2	54'2	58'2	*02'1	*06'1	*10'1	*14'1	*18'0	95
65°	96	47'1	*04'5	*22'5	*41'0	*59'5	*18'2	*37'2	*56'5	16'3	36'5	42°		96	21'5	25'5	29'3	33'4	37'4	41'5	45'5	49'5	53'5	57'4	96
68°	97	56'5	*17'4	*38'3	00'2	*22'3	*44'1	07'4	31'0	55'0	*19'3	71°	45°	97	01'2	05'2	09'2	13'1	17'1	21'1	25'1	29'0	33'0	37'0	97
72°	98	44'4	*10'5	*37'0	04'2	*32'5	01'4	31'5	*05'0	*33'3	*09'5	75°		98	40'5	44'5	48'5	52'4	56'4	*00'5	*04'5	*08'5	*12'4	*16'3	98
	99	45'1	22'3	02'4	44'3	29'5	19'2	14'1	16'2	30'2	06'3		44°	99	20'3	24'2	28'2	32'2	36'2	40'1	44'1	48'1	52'1	56'0	99
		77°	78°	79°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	86°														
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

3 2044 106 293 558

Date Due

~~15 Feb 51~~

~~25 Oct 51~~